Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
24. Januar 2025

Lineare Algebra I – Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Finden Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2.
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Finden Sie das charakteristische Polynom von M_a.
2. Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ M_a über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.
3. Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ M_a über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden $\mathbb{R}$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 4.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V, und $U \leq V$ ein Unterraum von V, so dass $f(U) \subseteq U$.

1. Beweisen Sie, dass $\overline{f}\colon V/U \to V/U$ wohldefiniert ist.
2. Beweisen Sie, dass $\chi_f = \chi_{f|_U} \times \chi_{\overline{f}}$.