Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
17. Januar 2025

# Lineare Algebra I – Übungsblatt 11

**Aufgabe 1.**
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mittels der Cramerschen Regel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Setzen Sie die erhaltene Lösung in die Gleichung ein, um sie zu überprüfen.

**Aufgabe 2.**
Finden Sie die Determinante und die Inverse der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis:* Erinnern Sie sich, dass Vertauschen der Spalten der Multiplikation mit Elementarmatrizen von rechts entspricht.

**Aufgabe 3.**
Sei $K$ ein Körper, $a \in K$. Finden Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

und beweisen Sie, dass sie nicht von $a$ abhängig ist.
*Hinweis:* Sie dürfen Aufgabe 4 aus Übungsblatt 10 benutzen.

**Aufgabe 4.**

1. Sei $K$ ein Körper. Beweisen Sie, dass für $b = \pm a \in K$ die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(K)$$

triviale Determinante hat.

2. Finden Sie $\det(A_n)$ für allgemeine $a$, $b \in K$ per Induktion über $n$.