Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
10. Januar 2025

Lineare Algebra I – Übungsblatt 10

Aufgabe 1.
Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar über $\mathbb{R}$ sind:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 3.
Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $\det A = 1$, und finden Sie die Inverse A^{-1} zu A.
Hinweis: Lösen Sie die Gleihungssysteme $AX = e_i$ für Standardbasisvektoren e_i.

Aufgabe 4.
Für ein n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ aus Elementen x_i in einem Körper K ist die Vandermonde-Matrix definiert durch:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\det V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$