Mathematisches Institut
der Universität München

Ludwig–
Maximilians–
Universität
München

LMU

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D–80333 München

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)
Wintersemester 2005/06, Klausur 1

1. **Permutationen** Sei S_3 die Menge der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$. Man beweise oder widerlege:

   (a) Sei $\sigma := (123) \in S_3$.Die Abbildung

   $$\begin{array}{rccc} \hat{\sigma}: & S_3 & \to & S_3 \\ & \tau & \mapsto & \sigma\tau \end{array}$$

   ist surjektiv.

   (b) Die Abbildung

   $$\begin{array}{rccc} q & S_3 & \to & S_3 \\ & \tau & \mapsto & \tau^2 \end{array}$$

   ist surjektiv.

0

Haus– und Postanschrift:
Theresienstraße 39
D–80333 München

Telefon: 0 89 / 2180 - 4402
Telefax: 0 89 / 280 52 48
Telex: 5 29 815 UNIV M D
email: kraus@rz.mathematik.uni-muenchen.de

Straßenbahn
Linie 27
Haltestelle Pinakothek

2. **Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems:** Für $a \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & a \\ a^2 & a^2-1 & 2 \\ -2a & -\frac{3}{2}a & -2 \end{pmatrix}$ sei $L(A)$ der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

   Man bestimme $\dim L(A)$ in Abhängigkeit von a. (Fallunterscheidung und Begründungen!)

3. **Lineare Abbildungen und Dimension:** Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Man beweise oder widerlege:

   (a) Es gibt einen Monomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

   (b) Es gibt einen Epimorphismus $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

4. **Steinitzscher Austauschsatz.**

   (a) Man formuliere den Steinitzschen Austauschsatz für endlich-dimensionale Vektorräume.

   (b) Nach welchem Beweisprinzip wird dieser Satz bewiesen?

   (c) Welche Bedeutung hat dieser Satz für den Begriff der Dimension eines endlich-dimensionalen Vektorraums?

5. **Basisergänzungssatz/Dimensionsformel** Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bestimmt als $f = \hat{A}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Man bestimme und skizziere die Bilder $f(e_i)$ der Basisvektoren $e_i, i = 1, 2, 3$.

   (b) Man bestimme $U := \mathbf{Ke} f \subset \mathbb{R}^3$ und gebe eine Basis B von U an.

   (c) Man ergänze die Basis B von U durch Auswahl geeigneter Vektoren unter den $e_i, i \in \{1, 2, 3\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$?

Pro Aufgabe 4 Punkte.

Jede Klausurteilnehmer hat für sich alleine zu arbeiten. Wer abschreibt oder abschreiben läßt oder unerlaubte Hilfsmittel benutzt, wird sofort disqualifiziert.
Es ist ein Lichtbildausweis offen bereitzuhalten und bei der Abgabe vorzuzeigen

Lösungen:

1. **Permutationen** Sei S_3 die Menge der Permutationen von $\{1,2,3\}$.

   (a) Sei $\sigma := (123) \in S_3$. Man zeige: Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \hat{\sigma}: & S_3 & \longrightarrow & S_3 \\ & \tau & \longmapsto & \sigma\tau \end{array}$$

   ist surjektiv.

   Aussage richtig. Beweis:

   i. 1. Möglichkeit: Sei $\rho \in S_3$. Setze $\tau := \sigma^{-1}\rho$. Dann $\hat{\sigma}(\tau) = \sigma\tau = \sigma\sigma^{-1}\rho = \rho$.

   ii. 2. Möglichkeit: Explizite Tabelle für die Komposition mit der angegebenen Permutation $\sigma = (123)$.

τ	$\sigma\tau$
(1)	(123)
(12)	(13)
(13)	(23)
(23)	(12)
(123)	(132)
(132)	(1)

   (b) Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} q & S_3 & \longrightarrow & S_3 \\ & \tau & \longmapsto & \tau^2 \end{array}$$

   ist surjektiv.

   Aussage falsch. Denn die Werte von q ergeben sich aus folgender Tabelle:

τ	τ^2
(1)	(1)
(12)	(1)
(13)	(1)
(23)	(1)
(123)	(132)
(132)	(123)

   Die Transpositionen $(12), (13), (23)$ kommen also nicht im Bild von q vor.

   (Pro Teilaufgabe 2 P.)

2. **Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems:** Für $a \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & a \\ a^2 & a^2-1 & 2 \\ -2a & -\frac{3}{2}a & -2 \end{pmatrix}$ sei $L(A)$ der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

   Man bestimme $\dim L(A)$ in Abhängigkeit von a. (Fallunterscheidung und Begründungen!)

(a) 1. Möglichkeit: Man geht genau entsprechend dem Gauß-Algorithmus vor. Ersetzt man Z_2 durch $4Z_2 - a^2 Z_1$ und Z_3 durch $2Z_3 + aZ_1$, erhält man die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & a \\ 0 & a^2 - 4 & 8 - a^3 \\ 0 & 0 & -4 + a^2 \end{pmatrix}$$

(2 P.)

Man sieht:

i. Für $a^2 = 4$, also $a \in \{-2, 2\}$, verschwindet die dritte Zeile der Stufenmatrix.

ii. Die zweite Zeile der Stufenmatrix verschwindet für $a = 2$, nicht aber für $a = -2$.

(dafür zusammen 1 P.)

iii. Für $a \notin \{-2, 2\}$ verschwindet weder die zweite noch die dritte Zeile der Stufenmatrix. (1 P.)

Also gilt:

a	$r =$ Rang von A	$3 - r =$ Dimension des Lösungsraums
2	1	2
-2	2	1
$\notin \{-2, 2\}$	3	0

(b) 2. (halbe) Möglichkeit: Wenn einem die Ausnahmewerte $a \in \{-2, 2\}$ bei Blick auf die Matrix auffallen, liegt es nahe, diese Werte direkt in A einsetzen. Man erhält:

i. Für $a = 2$: $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, also $\text{rg}A = 1$, $\dim L = 2$.

ii. Für $a = -2$: $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, also $\text{rg}A = 2$, $\dim L = 1$.

iii. Für $a \notin \{-2, 2\}$ ist es aber ohne eine Rechnung wie beim Gauß-Algorithmus nicht nachweisbar, daß dann $\text{rg}A = 3$, also $\dim L = 0$ gilt. Es ergibt sich also keine vollständige Lösung. Bewertung dieses Lösungsversuchs daher nur mit r/2.

3. **Lineare Abbildungen und Dimension:** Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Man beweise oder widerlege:

(a) Es gibt einen Monomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Aussage falsch. Beweis: Wäre f ein solcher Monomorphismus, wären $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ l.u. Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Wegen $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ist dies ein Widerspruch zum Austauschsatz (oder ähnliche Argumentation).

(b) Es gibt einen Epimorphismus $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Aussage richtig. Beweis: $f = \hat{A}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Beide Basisvektoren des $\mathbb{R}^2$ kommen im Bild von f vor; daher ist f surjektiv.

(Pro Teilaufgabe 2 P.)

4. **Steinitzscher Austauschsatz.**

(a) Man formuliere den Steinitzschen Austauschsatz für endlich-dimensionale Vektorräume.
Zitat:
Satz 4.2.5.3 (Steinitzscher Austauschsatz für endlich-dimensionale Vektorräume)
K Körper, V K-VR, $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis.
$v_1, \dots, v_k \in V$ l.u. $\Longrightarrow$

i. $k \leq n$
ii. Man kann die Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ so numerieren, daß auch $\{v_1, \dots, v_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis ist.

(2 P.)

(b) Nach welchem Beweisprinzip wird dieser Satz bewiesen?
Zitat:
Beweis: Vollständige Induktion nach k. (1 P.)

(c) Welche Bedeutung hat dieser Satz für den Begriff der Dimension eines endlich-dimensionalen Vektorraums?
Zitat:
Korollar 4.2.5.4 V VR; in V gebe es eine endliche Basis B der Länge n.

i. Jede Basis von V ist endlich.
ii. Jede Basis von V hat n Elemente.

Das heißt: Der Dimensionsbegriff ist wohldefiniert. (1 P.)

5. **Basisergänzungssatz/Dimensionsformel** Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bestimmt als $f = \hat{A}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Man bestimme und skizziere die Bilder $f(e_i)$ der Basisvektoren $e_i, i = 1, 2, 3$.

Die Bilder $f(e_i)$ sind die Spaltenvektoren der Matrix, also $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 P.)

(b) Man bestimme $U := \mathbf{Ke}f \subset \mathbb{R}^3$ und gebe eine Basis B von U an.

Die zu A gehörige Stufenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die parametrisierte Lösung ist daher $x(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix}$. (1 P.)

Als Basis von U erhält man $B = \{u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$. (1 P.)

(c) Man ergänze die Basis B von U durch Auswahl geeigneter Vektoren unter den $e_i, i \in \{1, 2, 3\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$?

Da der Vektor u in keiner der durch zwei der Basisvektoren $e_i, i = 1, 2, 3$ aufgespannten Ebenen liegt (in keiner Koordinatenebene), bildet u zusammen mit je zwei der Basisvektoren $e_i, i = 1, 2, 3$ eine Basis, also z.B. $\{u, e_1, e_2\}$. Man verifiziert leicht die l.U. dieser 3 Vektoren. (1 P.)