Probeklausur fuer Statistiker

bei Prof. Dr. Günther Kraus Dipl.mat Dipl.phys Alexander Böhm

Regelarbeitszeit: 120 min Hilfsmittel: Eine gängige Formelsammlung

Aufgabe 1

Bringe folgende Matrix auf Diagonalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

7 Punkte

Aufgabe 2

Im n-dimesinalen Raum sind n+1 Vektoren liner abhaengig.

4 Punkte

Aufgabe 3

Beweise oder widerlege:

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Wenn n Vektoren paarweise orthogonal sind , so sind diese n Vektoren

auch alle linear unabhängig.

4 Punkte

Aufgabe 4

Ergänze die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ so zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, dass der Ergänzungsvektor orthogonal zu allen anderen ist.

4 Punkte

Aufgabe 5

Man formuliere die Parsevalsche Gleichung.

Man formuliere den Kosinussatz und leite daraus den Satz von Pythagoras her.

6 Punkte

Aufgabe 6

Es sei $u_1 = (e_1 + e_2 - e_3)$,$w_2 = (e_1 - e_2 + e_2)$ und $w_2 = (-e_1 + e_2 + e_2)$.

Eine lineare Abbildung f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde bzgl. der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3) durch die Matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Finde die Matrix, die dieselbe Abbildung bzgl. der Basis

$\{u_1, u_2, u_3\}$ beschreibt.

6 Punkte

Aufgabe 7

Prüfe die Matrizen

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ auf Ähnlichkeit und Äquivalenz.

6 Punkte

Aufgabe 8

Es seien im folgenden Großbuchstaben $n \times n$ Matrizen und Kleinbuchstaben reelle Zahlen.

Prüfe den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen bzw. wähle die richtige Antwort aus.

$a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang}\,(\text{aA} - A) \quad = \quad \begin{cases} \text{Rang}\,A & \square \\ 0 & \square \\ 2\,\text{Rang}\,A & \square \end{cases}$	
$B\,\text{AB}^{-1} = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$	☐
$A^3 = E \Rightarrow A = E$	☐
$\text{Rang}\,(A + B) < \text{Rang}\,A$	☐
Bei jedem Endomorphismus gibt es mindestens einen Vektor, der sowohl ein Eigenvektor als auch ein Basisvektor ist	☐
Ist v ein Spaltenvektor ungleich dem Nullvektor und A eine Matrix mit $\det A \neq 0$, so bilden die Vektoren Av, $A^2 v, \ldots, A^n v$ eine Basis.	☐
A orthogonale Matrix $\Rightarrow \det A = \pm 1$	☐

7 Punkte

Aufgabe 9

Es seien A eine Matrix und b ein Vektor.

Man formuliere das Rangkriterium für die Lösbarkeit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems Ax=b.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

L(A,b) $\neq \emptyset \Leftrightarrow b \neq 0$	☐
L(A,b) Vektorraum $\Leftrightarrow$ b $\neq 0$	☐
für alle A gilt: dim L(A,b)=dim L(A)	☐

4 Punkte