Man macht sich die Entstehung am Besten so klar, wenn man die Bildung der l_{ij} und r_{ij}

nacheinander ansieht.

Fuer die r_{ij} gilt: Nach dem $k-1$ -ten Gauss-Schritt ist vom urspruenglichen Element a_{ij}

das entsprechene Vielfache aller r_{ij} derselben Spalte und aller Zeilen darueber abgezogen worden,wobei das entsprechende Vielfache heisst, dass der Wert mit dem Faktor, der beim jeweiligen Gauss-Schritt verwendet wurde, multipliziert wurde, also formal:

Fuer i $\leq$ k:

$r_{\mathrm{ik}} = a_{\mathrm{ik}} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{\mathrm{ij}} r_{\mathrm{jk}}$. Die Summe hat schon die Form eines Matrixproduktes. Loest man also nach a_{ik} auf, so erhaelt man $a_{\mathrm{ik}} = \sum_{j=1}^{i-1} l_{\mathrm{ij}} r_{\mathrm{jk}} + r_{\mathrm{ik}}$. Dies kann man als <u>eine</u> Summe schreiben, wenn man

$l_{\mathrm{ii}} = 1$ setzt, also $a_{\mathrm{ik}} = \sum_{j=1}^{i} l_{\mathrm{ij}} r_{\mathrm{jk}}$. Dies stellt also ein Element eines Matrixproduktes dar, da die beiden inneren Indizes gleich sind.

Ebenso betrachtet man nun die Elemente mit i>k, also die Elemente, an deren Stelle in der Ergebnismatrix 0 steht. Ist k wieder der Spaltenindex, so hat man also $k-1$ Schritte vorher gemacht. Das heisst, dass an derselben Stelle das Element l_{ij} gebildet wird.

Dies ist aber nun einfach der Quotient des Elementes, das gerade an dieser Stelle steht und des Diagonalelementes r_{kk}. Das Element an dieser Stelle ist nun wieder das Ausgangselement von dem die r_{ij} der darueberligenden Zeilen, multipliziert mit den enstprechenden Vielfachen, abgezogen wurden.

also fuer i<k:

$l_{\mathrm{ik}} = \frac{a_{\mathrm{ik}} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{\mathrm{ij}} r_{\mathrm{jk}}}{r_{\mathrm{kk}}}$, aufloesen nach a_{ik} ergibt wieder $a_{\mathrm{ik}} = \sum_{j=1}^{k-1} l_{\mathrm{ij}} r_{\mathrm{jk}} + l_{\mathrm{ik}} r_{\mathrm{kk}}$ was man wieder zu einer Summe zusammenfassen kann: $a_{\mathrm{ik}} = \sum_{j=1}^{k} l_{\mathrm{ij}} r_{\mathrm{jk}}$.

also wieder ein Element eines Matrixproduktes.

Nach der Definition der Matrixmultiplikation folgt dann

$a_{\mathrm{ik}} = \sum_{j=1}^{n} l_{\mathrm{ij}} r_{\mathrm{jk}}$ also A = LR.