Blatt 13

19.01.08

Erste Klausur in linearer Algebra für Informatiker und Statistiker

bei Prof. Dr. Günther Kraus Dipl.mat Dipl.phys Alexander Böhm

Regelarbeitszeit: 120 min Hilfsmittel: Eine gängige Formelsammlung

Aufgabe 1

es seien die Vektoren und Matrizen

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad {}^t v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben.}$$

Berechne alle möglichen Produkte AB bzw. ${}^tA{}^tB$, wobei A bzw. B einer der angegebenen Vektoren oder eine der angegebenen Matrizen ist.

7 Punkte

Aufgabe 2

Zeige:

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{genau dann linear abhängig, wenn die Vektoren}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{linear abhängig sind.}$$

4 Punkte

Aufgabe 3

Beweise oder widerlege:

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Wenn n Vektoren paarweise linear unabhängig sind , so sind diese n Vektoren

auch alle linear unabhängig.

4 Punkte

Aufgabe 4

Ergänze die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ so zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, dass der Ergänzungsvektor orthogonal zu allen anderen ist.

4 Punkte

Aufgabe 5

Man formuliere die Ungleichung von Cauchy − Schwarz.

Man formuliere und beweise die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.

4 Punkte

Aufgabe 6

Es sei $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ und $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2)$.

Eine lineare Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ werde bzgl. der kanonischen Basis (e_1, e_2)durch die Matrix

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben. Finde die Matrix, die dieselbe Abbildung bzgl. der Basis

$\{w_1, w_2\}$ beschreibt.

6 Punkte

Aufgabe 7

Prüfe die Matrizen

A$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ auf Ähnlichkeit und Äquivalenz.

6 Punkte

Aufgabe 8

Es seien im folgenden Großbuchstaben $n \times n$ Matrizen und Kleinbuchstaben reelle Zahlen.

Prüfe den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen bzw. wähle die richtige Antwort aus.

$a \neq 0 \Rightarrow \det aA =$	$a^n \det A$	☐
	$a \det A$	☐
	$a^{n^2} \det A$	☐
$A = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$		☐
$A^2 = E \Rightarrow A = E$		☐
Rang AB $<$ Rang A		☐
Bei jedem Endomorphismus gibt es mindestens einen Vektor, der sowohl im Bild als auch im Kern liegt.		☐
Ist v ein Spaltenvektor ungleich dem Nullvektor und A eine Matrix mit $\det A \neq 0$, so bilden die Vektoren Av, $A^2 v, \ldots, A^n v$ eine Basis.		☐
A orthogonale Matrix $\Rightarrow \det A = 1$		☐

7 Punkte

Aufgabe 9

Bilde aus den folgenden Vektoren eine Orhtonormalbasis:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 Punkte

Aufgabe 10

Es seien A eine Matrix und b ein Vektor.

Man formuliere das Rangkriterium für die Lösbarkeit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems Ax=b.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

L(A,b) $\neq \emptyset \Leftrightarrow b = 0$	☐
L(A,b) Vektorraum $\Leftrightarrow$ b=0	☐
für alle b gilt: dim L(A,b)=dim L(A)	☐

4 Punkte