Uebungen fuer Lineare Algebra fuer Informatiker und Statistiker
Wintersemester 2007/8

Prof. Dr. Guenther Kraus Alexander Boehm

Abgabe Dienstag 20 November in den Kaesten

Blatt 5

Aufgabe 17

In der Numerik loest man lineare Gleichungen haeufig mittels der LR-Zerlegung einer Matrix. Dies bedeutet, dass die Matrx A=(a_{ij}) zuerst in die Form A=LR gebracht wird, wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist mit zusaetzlich Einsen auf der Hauptdiagonale und R eine obere Dreicksmatrix. Wendet man nun auf eine Matrix A das Gaussverfahren an, so subtrahiert man beim k-ten Schritt das l_{ik}- fache der k-ten Zeile von der i-ten. Der Faktor l_{ik} wird durch

$l_{\mathrm{ik}} = \frac{a_{\mathrm{ik}}}{r_{\mathrm{kk}}}$ erhalten, wobei r_{kk} das jeweilige Pivotelement beim k-ten Schritt des Gaussalgorithmus ist.

Zeige, dass man eine solche Zerlegung sicher erreichen kann, wenn die Pivotelemente immer auf der Hauptdiagonalen stehen.

Anleitung:

Schreibt man diese l_{ij} in eine Matrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen, so erhaelt man eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ l_{11} & 1 & 0 & & \\ l_{21} & l_{12} & 1 & & \\ . & l_{22} & l_{13} & & \\ . & . & l_{23} & & \\ . & . & . & & \\ l_{n-11} & l_{n-22} & l_{n-33} & . & .\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix, die man am Schluss erhaelt, hat die in der Form

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & r_{2n} \\ . & 0 & & . \\ . & . & \ddots & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & & r_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}$$

Beschreibe die Bildung der r_{ik} aus den a_{ik} der Ausgangsmatrix. Dann erhaelt man eine Gleichung fuer die a_{ik} mit $\mathrm{k} > \mathrm{i}$.

Beschreibe die Bildung der l_{ij} ebenso und man erhaelt eine Gleichung fuer die a_{ik} mit $i \geq k$.

4 Punkte

Aufgabe 18

Pruefe die folgenden Vektoren auf lineare Unabhaengigkeit: $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Aufgabe 19

Ergaenze die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

4 Punkte

20

Legt ein Fussballspieler seinen Ball am Elfmeterpunkt zurecht, so wir dieser einige Male um verschiedene Achsen gedreht. Man kann diese vielen Drehungen tatsaechlich zu einer einzigen zusammenfassen. Rechnerisch wird das wie folgt bewerkstelligt.

Eine Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ nennt man eine Drehmartix. Zeige,dass das Produkt zweier solcher Drehmatrizen wieder eine ist.

Erinnere dich dazu an die Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen.

4 Punkte