

Blatt 4

13 Im Zuge des sich anbahnenden Streiks bei einem grossen Transportunternehmen muss man jetzt schon die Weichen stellen fuer eine mehrschienige Umschichtung des Verkehrs.

a.) Um welches Unternehmen handelt es sich.

b.) Es gibt die Direktverbindungen E-D, HH-B, M-H, S-E, K-B, E-F, H-S, C-F, D-F, HH-S, M-E, F-H, S-L, B-L, L-D.

Stelle mittels einer geeigneten Matrizenmultiplikation fest, welche Verbindungen es mit einmal Umsteigen, mit zweimal Umsteigen und mit dreimal Umsteigen gibt.

Anleitung: Multipliziert man eine Spalte einer Matrix mit einer Zeile einer anderen Matrix, so kann man ein Ergebnis verschieden von Null als eine positive Verknuepfung deuten. In der Graphentheorie nennt man die entsprechende Matrix Adjazenmatrix.

4 PUNKTE

14

Die ersten Fibonaccizahlen sind 1 1 2 3 5 8 13 21 . Deren Bildung ist hinlaenglich bekannt oder leicht abzulesen, also

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n.$$

wenn f_n die n-te Fibonaccizahl ist.

Stelle die Fibonaccizahlen durch geeignete Matrixmultiplikation dar, so, dass der i-ten Fibonaccizahl die i-te Potenz einer Matrix zugeordnet werden kann.

Dazu: Die gesuchte Matrix hat vier Eintraege.

Diese Aufgabe kann man sogar noch wesentlich erweitern, so dass man die Fibonaccizahlen selbst als Potenz einer gewissen Zahl darstellen kann. Dazu brauchen wir aber erst noch weitere Begriffe, also: Aufgabe merken.

4 PUNKTE

15

Stelle die Ableitung eines allgemeinen Polynoms sechsten Grades als Matrizenmultiplikation dar.

Man kann die Ableitung als lineare Abbildung vom Vektorraum der Polynome in den Vektorraum der Polynome interpretieren.

16 Forme die Martix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ -3 & 9 & 15 \\ 4 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

durch Multiplikation mit geeigneten Elementarmatrizen mit ganzzahligen Eintraegen so um, dass das Ergebnis die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

hat mit $\lambda_{i+1} | \lambda_i$.

Dies ist eine rechnerische Anwendung des Elementarteilersatzes, also die Moeglichkeit, eine Matrix ueber einem euklidischen Ring auf Diagonalgestalt zu bringen. Der Ring hier ist einfach \mathbb{Z} .

Anleitung: Bei ganzen Zahlen gibt es immer einen ggT.

Andererseits gibt es bei teilerfremden Zahlen α und β immer ganze Zahlen μ_1 und μ_2 mit $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 = 1$. Diese kann man etwa mit dem euklidischen Algorithmus finden, hier also einfach Teilen mit Rest.