Ein einfaches Beispiel zur Basistr a n s f o r m a t i o n

Es seien die Basen $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben .

Will man nun die Tranformation von der b -Basis in die a -Basis beschreiben, so heisst das, die Koordinaten eines Vektors v, dessen Koordinaten in der b - Basis bekannt sind, durch die Koordinaten in der a - Basis auszudruecken.

Oder anders, die Transformatinsmatrix T finden, so dass Tv = w der Koordinatenvektor in der a Basis ist, wenn v der Koordinatenvektor in der b - Basis ist..

Zunaechst heisst ja $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dass $b_1 = 1e_1 + 1e_2$ in der kanomnischen Basis.

Genauso $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dass $a_1 = 1e_1 + 2e_2$ in der kanomnischen Basis.

Man kann also den Ansatz machen:

$$b_1 = t_{11}a_1 + t_{21}a_2$$

$$b_2 = t_{12}a_1 + t_{22}a_2$$

oder zusammen in Matrixschreiweise : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$

also $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Dann ist die Transformatinsmatrix T$= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Beispielsweise

Ist jetzt ein Vevtor v in der b Basis gegeben, also etwa v$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der kanonischen Basis, so muss der gleiche Koordinatenvektor in der kanonischen Basis erscheinen, wenn man den Basiswechsel durchfuehrt.

Zur Ueberpruefung rechnet man Tv$= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix} = -10\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

also das gleich wie oben.

Jede Linearkombination der Basiselemente hat natuerlich dieselbe Transformationsmatrix.