MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Sommersemester 2008
Prof. Dr. G. Kraus

Übungen zur Funktionentheorie **Blatt 1**

1. (a) Es seien $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}^*$. Man zeige, daß es genau ein $u \in \mathbb{C}$ gibt, mit $z = uz'$. Man schreibt $u = \frac{z}{z'}$.
   (b) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß $\mathrm{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\mathrm{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

2. (a) Man beweise: Eine Folge z_n konvergiert genau dann gegen c, wenn die Folge $\overline{z}_n$ gegen $\overline{c}$ konvergiert.
   (b) Man entscheide, ob die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} z_0 &:= 0 \\ z_{n+1} &:= \frac{z_n + i}{z_n - i}\ , \text{ für } n \geq 0, \end{aligned}$$

   konvergent ist.

3. (a) Man beweise: Jede quadratische Gleichung $z^2 + az + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ besitzt eine Lösung $z \in \mathbb{C}$. Wann ist diese Lösung eindeutig bestimmt?
   (b) Man gebe die Lösungen der folgenden Gleichung an:

$$z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$$

4. Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden.
   (a) Es seien $e \in \mathbb{C}^*$, $f \in \mathbb{C}$, und es sei $l : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine affin-lineare Abbildung mit

$$l(z) := ez + f\ .$$

   Man zeige: Es gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

   genau dann, wenn

$$l(a)^2 + l(b)^2 + l(c)^2 = l(a)l(b) + l(b)l(c) + l(c)l(a)\ .$$

   (b) Es gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

   genau dann, wenn das Dreieck mit den Ecken a, b, c gleichseitig ist.

***Abgabe**: Montag 21.04.2008, 16:15 Uhr im Übungskasten im ersten Stock, vor der Bibliothek.*