MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 6
23.05.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

21. a) *(Staatsexamen Herbst 1991.)* Der Handlauf des Geländers einer Wendeltreppe beschreibe die Raumkurve

$$\gamma_a : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma_a(t) = (\cos t, \sin t, at)$$

für einen festen Parameter $a > 0$. Der Architekt hat für den Handlauf ein Band der Länge 7 m bereitgestellt. Wie groß darf a höchstens sein, damit das bereitgestellte Band reicht?

b) *(Staatsexamen Frühjahr 2003.)* Gegeben sei die Kurve

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3, 0 \leq x \leq 4\}.$$

Skizzieren Sie K und bestimmen Sie ihre Länge.
(Hinweis: Substitution.)

a)

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + a^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + a^2}dt = \sqrt{1 + a^2}(2\pi - 0)$$

$$\sqrt{1 + a^2}2\pi \leq 7$$

$$1 + a^2 \leq \frac{49}{4\pi^2}$$

$$0 < a \leq \sqrt{\frac{49}{4\pi^2} - 1}$$

b) Hier ist darauf zu achten, dass für y auch negative Werte angenommen werden: Wärend x^3 $[0, 4^3]$ durchläuft, kann y die Werte $\pm\sqrt{x^3}$ annehmen. K ist also das Bild folgender Kurve:

$$k : [-4^{\frac{3}{2}} = -8, 4^{\frac{3}{2}} = 8] \to \mathbb{R}^2, \qquad k(t) = (t^{\frac{2}{3}}, t).$$

Wegen der Achsensymmetrie des Integranden gilt:

$$\int_{-8}^{8} \sqrt{\frac{4}{9}t^{-\frac{2}{3}} + 1}dt = 2\int_0^8 \sqrt{\frac{4}{9}t^{-\frac{2}{3}} + 1}dt = 2\int_0^8 t^{-\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{4}{9} + t^{\frac{2}{3}}}dt$$

$$= 2\int_{\frac{4}{9}}^{\frac{40}{9}} t^{-\frac{1}{3}}\sqrt{u}\frac{du}{\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}} = 2\int_{\frac{4}{9}}^{\frac{40}{9}} \sqrt{u}\frac{du}{\frac{2}{3}} = 2u^{\frac{3}{2}}|_{\frac{4}{9}}^{\frac{40}{9}}$$

$$= 2(\frac{80\sqrt{10}}{27} - \frac{8}{27})$$

22. a) *(Staatsexamen Frühjahr 2006.)*

i. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

ist.

ii. Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto t \cdot (\cos t, \sin t).$$

iii. Skizzieren Sie die Bildmenge $\gamma([0, 6\pi])$.

b) *(Staatsexamen Herbst 2006.)* Gegeben sei die Kurve $C : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$C(t) = (x(t), y(t)), \qquad x(t) = \frac{t^6}{6}, \qquad y(t) = 2 - \frac{t^4}{4}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge von C zwischen den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.
(Hinweis: Substitution $s := t^4 + 1$.)

a) Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv08.pdf.`

b) Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind dort, wo $x(t) = 0$ oder $y(t) = 0$ gilt. Also bei $t = 0$ und bei $t = \sqrt[4]{8}$.

$$\int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^{10} + t^6}dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3\sqrt{t^4+1}dt = \int_1^9 t^3\sqrt{u}\frac{du}{4t^3} = \int_1^9 \sqrt{u}\frac{du}{4} = \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}|_1^9$$
$$= \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3}$$

23. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x_1x_2\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

a) Man zeige, dass f partiell differenzierbar ist und bestimme die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x)$ und $\partial_2 f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

b) Man zeige, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, im Nullpunkt aber $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$ gilt.

c) Ist f stetig an der Stelle $(0,0)$?

(Hinweis: Die Ableitungen im Ursprung müssen mit dem Differntialquotienten berechnet werden.)

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv10.pdf.`

24. *(Staatsexamen Herbst 1991.)* Unter der allgemeinen Voraussetzung, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differnzierbare Funktion ist, widerlege oder beweise man jede der folgenden sechs Aussagen:

    a) Wenn $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f'(x)$ gilt, so ist f' beschränkt.

    b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ist $f(A)$ offen.

    c) Ist $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $f(A)$ abgeschlossen.

    d) Ist $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $f(A)$ beschränkt.

    e) Besitzt f eine Umkehrfunktion, so ist diese stetig differenzierbar.

    f) Ist f beschränkt, so gilt $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

    Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

    `www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv07.pdf.`