MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 5
16.05.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)
Lösungsvorschlag

17. Man untersuche die folgenden Punktfolgen im $\mathbb{R}^2$ auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls ihren Grenzwert an. Welche der Folgen besitzen Häufungspunkte?

    a) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{k}+1}, \frac{2k}{k^2+1}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$,

    b) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(\cos\frac{k\pi}{2}, (-1)^k \frac{k}{k+1}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$,

    c) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(\cos\frac{1}{k}, k\sin\frac{1}{k}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$,

    d) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \left(k\cos\frac{1}{k}, \sin\frac{1}{k}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$.

    Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

    `mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv08.pdf.`

18. a) Gegben seien die Kurven $g, h : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$,

    $$g(t) := (t, e^t),$$

    $$h(t) := (t^2, e^{t^2}).$$

    Man skizziere g ung h, bestimme ihre Tangentialvektoren für $t = \frac{1}{2}$, 1, 2 und suche nach singulären Punkten.

    b) Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

    $$f(t) := (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t)).$$

    Man skizziere die Kurve und zeige, dass $f|]0, \pi[$ injektiv und regulär ist.

    a) Beide Kurven sehen aus wie der Graph der e-Funktion.
    $(t', e^{t'}) = (1, e^t)$ und $(t^{2'}, e^{t^{2'}}) = (2t, 2te^{t^2})$

t	$\frac{1}{2}$	1	2
(t, e^t)	$(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{2}})$	$(1, e)$	$(2, e^2)$
$(1, e^t)$	$(1, e^{\frac{1}{2}})$	$(1, e)$	$(1, e^2)$
(t^2, e^{t^2})	$(\frac{1}{4}, e^{\frac{1}{4}})$	$(1, e)$	$(4, e^4)$
$(2t, 2te^{t^2})$	$(1, e^{\frac{1}{4}})$	$(2, 2e)$	$(4, 4e^4)$

Eigentlich war die Aufgabe folgendermaßen gemeint (mit gleichen Punkten, nicht mit gleichen t-Werten), um zu zeigen, dass die Tangentilavektoren der beiden Kurven in gleichen Punkten parallel, aber verschieden lang sind:

t	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1
(t, e^t)	$(\frac{1}{16}, e^{\frac{1}{16}})$	$(\frac{1}{4}, e^{\frac{1}{4}})$	$(1, e)$
$(1, e^t)$	$(1, e^{\frac{1}{16}})$	$(1, e^{\frac{1}{4}})$	$(1, e)$
t	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
(t^2, e^{t^2})	$(\frac{1}{16}, e^{\frac{1}{16}})$	$(\frac{1}{4}, e^{\frac{1}{4}})$	$(1, e)$
$(2t, 2te^{t^2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{\frac{1}{16}})$	$(1, e\frac{1}{4})$	$(2, 2e)$

h hat einen singulären Punkt für $t = 0$.

19. *(Staatsexamen Herbst 2003.)* Seien p ein Punkt und M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Man beweise, dass auch $\{p + x | x \in M\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

    Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

    `www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv07.pdf.`

20. *(Staatsexamen Herbst 1994.)* Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Man zeige: Hat f keine Nullstelle, so hat für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$ keine der Funktionen f_n mit $n \geq n_0$ eine Nullstelle.

    Sei o.B.d.A. $f > 0$ (für $f < 0$ geht der Beweis ebenso). Wegen der Abgschlossenheit von $[0, 1]$ gibt es ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $0 < f(x_0) = \inf\{f([0, 1])\} =: \varepsilon$. Also $f(x) \geq \varepsilon > 0$ für alle x. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle x für $n \geq n_0$. Also ist $f_n(x) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ für alle x für $n \geq n_0$.