MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 4
09.05.2007

# Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

13. Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

a)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k},$$

b)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

a) Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-bv05.pdf`.

b) $\frac{1}{x(\ln x)^2}$ ist ebenfalls positiv und monoton fallend für $x \geq 2$, allerdings gilt hier für das Integral,

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_2^{\infty} \frac{\frac{1}{x}dx}{(\ln x)^2} = \left.\frac{-1}{\ln(x)}\right|_2^{\infty} = 0 - \frac{-1}{\ln(2)},$$

konvergiert also, ebenso die Reihe.

14. a) Man bestimme den maximalen Definitionsbereich $\mathbf{D}$ der Funktion

$$f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

b) Man bestimme reelle Zahlen $A$, $B$, $C$, so dass für alle reellen Zahlen $x \in \mathbf{D}$ gilt:

$$\frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx}{(x+1)^2}.$$

(Hinweis: Koeffizientenvergleich.)

c) Man bestimme eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ der Funktion $f$.

a) Man sieht sofort, daß 1 (oder auch $-1$) Nullstelle von $x^3 + x^2 - x - 1$ ist. Polynomdivision liefert die Linearfaktorzerlegung $x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1)$. Damit ist $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx}{(x+1)^2} \\
&= \frac{A(x+1)^2 + B(x^2-1) + Cx(x-1)}{x^3+x^2-x-1} \\
\Rightarrow & 1 = A(x+1)^2 + B(x^2-1) + Cx(x-1) \\
& = x^2(A+B+C) + x(2A-C) + (A-B) \\
\Rightarrow & A+B+C = 0 \\
& 2A - C + 0 \\
& A - B = 1 \\
\Rightarrow & A = \frac{1}{4} \\
& B = -\frac{3}{4} \\
& C = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+x^2-x-1} &= \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x}{(x+1)^2} dx \\
&= \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx \\
&= \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln((x+1)^2) + \frac{1}{x+1}) \\
&= \frac{1}{4}(\ln(x-1) - 3\ln(x+1) + 2(\ln(x+1) + \frac{1}{x+1})) \\
&= \frac{1}{4}(\ln(x-1) - \ln(x+1) + 2\frac{1}{x+1})
\end{aligned}$$

15. Für $0 < x \in \mathbb{R}$ wird die *Gammafunktion* durch ein uneigentliches Integral definiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

a) Beweisen Sie, dass dieses uneigentliche Integral existiert (indem Sie für $t \searrow 0$ und $t \to \infty$ jeweils eine Majorante der Funktion $t^{x-1}e^{-t}$ angeben, deren unteigentliches Integral konvergiert).

b) Beweise Sie die Funktionalgleichung der Gammafunktion

i.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (x > 0)$$

(Hinweis: Partielle Intergration),

ii.

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

(die Gammafunktion interpoliert also die Fakultät).

a) $t \searrow 0 : t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$, und weil $x-1 > -1$, konvergiert das Integral.
$t \to \infty$ : Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq x+1$, dann

$$t^{x-1}e^{-t} = \frac{t^{x-1}}{e^t} = \frac{t^{x-1}}{1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots} \leq \frac{t^{x-1}}{\frac{t^N}{N!}} = \frac{1}{\frac{t^{N-x+1}}{N!}} \leq \frac{N!}{t^2},$$

und für die rechte Seite konvergiert das Integral.

b)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}|_0^\infty - \int_0^\infty -xt^{x-1}e^{-t} dt$$
$$= 0 - 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

c) Induktionsanfang: $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^\infty = 0 + 1 = 0!$. Der Schritt ist b).

16. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Abbildung

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

b) Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$$

definiert eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

c) Für eine (evtl. unendliche) Menge $\{X_i\}$ offener Teilmengen $X_i \subset \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ ist ihre Vereinigung

$$\bigcup_i X_i$$

auch offen.

d) Für eine (evtl. unendliche) Menge $\{X_i\}$ offener Teilmengen $X_i \subset \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ ist ihr Durchschnitt

$$\bigcap_i X_i$$

auch offen.

a) i. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x,y) = d(y,x)$

iii.

| | $d(x,y)$ | $+$ | $d(y,z)$ | $\geq$ | $d(x,z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x = y = z$ | 0 | $+$ | 0 | $\geq$ | 0 |
| $x = y \neq z$ | 0 | $+$ | 1 | $\geq$ | 1 |
| $x = z \neq y$ | 1 | $+$ | 1 | $\geq$ | 0 |
| $x \neq y \neq z \neq x$ | 1 | $+$ | 1 | $\geq$ | 1 |

b) Das Herausziehen der Skalarmultiplikation ist verletzt, denn für $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt,

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} 4x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (2x_i)^2.$$

c) Zu zeigen ist, dass zu einem beliebigen $x \in \bigcup_i X_i$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_i X_i$: $x$ ist in irgendeinem der $X_i$, und da diese Menge $X_i$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset X_i \subset \bigcup_i X_i$. Fertig.

d) Gegenbeispiel: Die Mengen

$$\begin{gathered} ]-1,1[ \\ ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[ \\ ]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[ \\ ]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[ \\ \vdots \end{gathered}$$

sind alle offen, aber ihr Durchschnitt ist die nicht offene Menge $\{0\}$.