MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 3
02.05.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

5. *(Staatsexamen Frühjahr 2000.)* Man berechne eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot \ln(x)$$

für $x > 0$.

Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

`www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s06/s-lv04.pdf.`

6. a) Bestimmen Sie Stammfunktionen zu $(\sin(x))^2$ $(x \in \mathbb{R})$ und $(\sin(x))^3$ $(x \in \mathbb{R})$.

   b) *(Staatsexamen Frühjahr 2002.)* Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, und sei $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := (x - \frac{\pi}{2})f(\sin(x))$. Berechnen Sie $g(0)$, $g(\frac{\pi}{2})$ und $g(\pi)$, und untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von g auf $[0, \pi]$. Beweisen Sie hiermit die Gleichheit

$$\int_0^\pi x f(\sin(x))dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x))dx,$$

und benutzen Sie dies zur Berechnung des Integrals $\int_0^\pi x(\sin(x))^2 dx$.

a)

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\sin(x)dx &= -\cos(x)\sin(x) - \int -\cos(x)\cos(x)dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx \\
2\int \sin^2(x)dx &= -\cos(x)\sin(x) + \int 1dx \\
\int \sin^2(x)dx &= \frac{1}{2}(-\cos(x)\sin(x) + x) + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \sin(x)\sin^2(x)dx &= -\cos(x)\sin^2(x) - \int -\cos(x)2\sin(x)\cos(x)dx \\
&= -\cos(x)\sin^2(x) + \int 2\sin(x)(1-\sin^2(x))dx \\
3\int \sin^3(x)dx &= -\cos(x)\sin^2(x) + \int 2\sin(x)dx \\
\int \sin^3(x)dx &= \frac{1}{3}(-\cos(x)\sin^2(x) - 2\cos(x)) + C \\
&= \frac{1}{3}\cos(x)(\cos^2(x)+1) + C
\end{aligned}
$$

b) $g(0) = -\frac{\pi}{2}f(0)$, $g(\frac{\pi}{2}) = 0$, $g(\pi) = \frac{\pi}{2}f(0)$, was den Verdacht der Punktsymmetrie zum Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ nahelegt.
$\tilde{g}(x) := g(x+\frac{\pi}{2}) = xf(\sin(x+\frac{\pi}{2}) = xf(\cos(x))$ geht aus g hervor durch Verschieben um $\frac{\pi}{2}$ nach links, und es gilt: $\tilde{g}(-x) = -xf(\cos(-x)) = -xf(\cos(x)) = -\tilde{g}(x)$.
Aus dieser Symmetrie folgt

$$\int_0^\pi g(x)dx = 0.$$

Und damit

$$\int_0^\pi xf(\sin(x))dx = \int_0^\pi xf(\sin(x)) - g(x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))dx.$$

Mit $f(x) := x^2$ gilt nun

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x(\sin(x))^2dx = \int_0^\pi xf(\sin(x))dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))dx \\
= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (\sin(x))^2dx &= \frac{\pi}{2}[\frac{1}{2}(-\cos(x)\sin(x)+x)]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

7. *(Staatsexamen Herbst 1999.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralechnung, dass für jede reelle Zahl a gilt:

$$2\int_0^a \left(f(r)\left(\int_0^r f(s)ds\right)\right)dr = \left(\int_0^a f(t)dt\right)^2.$$

Was so kompliziert aussieht, sind Funktionen in Abhängigkeit der Variablen a. Ableiten der rechten Seite nach a führt zu

$$\frac{d\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2}{da} = 2\int_0^a f(t)dt\frac{d\int_0^a f(t)dt}{da} = 2\int_0^a f(t)dtf(a),$$

und links zu

$$\frac{d2\int_0^a \left(f(r)\left(\int_0^r f(s)ds\right)\right)dr}{da} = 2f(a)\int_0^a f(s)ds = 2\int_0^a f(s)dsf(a).$$

Die Ableitungen sind also gleich, und damit können sich linke und rechte Seite nur noch durch eine additive Konstante unterscheiden. Dass dies nicht der Fall ist, sieht man durch Vergleich der Funktionswerte an einer beliebigen Stelle, z.B. $a = 0$:

$$2\int_0^0 \left(f(r)\left(\int_0^r f(s)ds\right)\right) dr = 0 = \left(\int_0^0 f(t)dt\right)^2.$$

8. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ nicht gleichmäßig stetig auf $]0,1]$ ist.

   b) *(Staatsexamen Herbst 2000.)* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, für die gilt

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0.$$

   Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

   a) Beweis durch Widerspruch. Sei $\delta := 1$. Angenommen es gäbe ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|f(x_0) - f(x_1)| = |\sin(\frac{1}{x_0}) - \sin(\frac{1}{x_1})| < 1$$

   für alle $x_0,\ x_1 \in]0,1]$ mit $|x_0 - x_1| < \varepsilon$.
   Setze $n \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ und $x_0 := \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $x_1 := \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_0 - x_1| &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} = \frac{\pi}{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)} < \frac{\pi}{(2n\pi)^2} \\ &< \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

   aber

$$|\sin(\frac{1}{x_0}) - \sin(\frac{1}{x_1})| = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = 1 + 1 = 2.$$

   Also kann es ein solches ε nicht geben, und f ist nicht gleichmäßig stetig.

   b) Dies ist bei Herrn Dr. Schörner nachzulesen unter

   `www.mathematik.uni-muenchen.de/~schoerne/diff+int2-s05/s-lv04.pdf`.