Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV) Lösungsvorschlag

5. *(Staatsexamen Frühjahr 2001)* Geben Sie Beispiele für Funktionen mit den folgenden Eigenschaften an oder begründen Sie, dass keine solche Funktion existiert.

   a) $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, aber nicht stetig;

   b) $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht beschränkt;

   c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht differnzierbar;

   d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differnezierbar, aber f_4' ist nicht stetig.

   a)
   $$f_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, 0[, \\ 1 & \text{für } x \in [0, 1] \end{cases}$$
   ist als Treppenfunktion integrierbar,

   b) eine stetige, reelle Funktion ist auf einem abgeschlossen Intervall beschränkt,

   c)
   $$f_3(x) := |x|,$$

   d)
   $$f_4(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
   ist differnzierbar, aber f_4' bei 0 nicht stetig (s. Aufgabe 3).

6. Berechnen Sie

   a) mit partieller Integration
   $$\int 1 \cdot ln(x) dx,$$

   und mit Hilfe der Substitutionsmethode

   b)
   $$\int x \ln(x^2) dx \qquad (t = x^2),$$

c)

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)dx \qquad (t = x^2+1),$$

d)

$$\int_0^1 e^x\sqrt{e^x-1}dx \qquad (t=\sqrt{e^x-1}).$$

a)

$$\int 1\cdot ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C = x(\ln(x)-1)+C$$

b)

$$\begin{aligned} &\int x\ln(x^2)dx \qquad t := x^2 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \\ &\int x\ln(x^2)dx = \int x\ln(t)\frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{2}\ln(t)dt = \frac{1}{2}t(\ln(t)-1)+C \\ &\qquad = \frac{1}{2}x^2(\ln(x^2)-1)+C = x^2(\ln(x)-\frac{1}{2})+C \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &\int_0^2 x\cos(x^2+1)dx \qquad t := x^2+1 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \\ &\int_0^2 x\cos(x^2+1)dx = \int_1^5 x\cos(t)\frac{dt}{2x} = \int_1^5 \frac{1}{2}\cos(t)dt = \frac{1}{2}(\sin(5)-\sin(1)) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} &\int_0^1 e^x\sqrt{e^x-1}dx \qquad t := \sqrt{e^x-1} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} \\ &\int_0^1 e^x\sqrt{e^x-1}dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} e^x t\frac{dt2\sqrt{e^x-1}}{e^x} = \int_0^{\sqrt{e-1}} 2t^2dt \\ &\qquad = \frac{2}{3}(\sqrt{e-1}^3 - 0^3) = \frac{2}{3}\sqrt{e-1}^3 \end{aligned}$$

7. *(Staatsexamen Herbst 2005)* Beweisen Sie für $0 < x < 1$ die Gleichheit

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

und leiten Sie hieraus eine Funktionalgleichung für den Arcustangens her.

$$\begin{aligned} &\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad u := \frac{1}{t} \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t^2} \\ &\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{du(-t^2)}{1+\frac{1}{u^2}} = \int_{\frac{1}{x}}^1 -\frac{du}{u^2+1} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} \end{aligned}$$

Es gilt, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, also folgt

$$\arctan(1) - \arctan(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(\frac{1}{x}) - \arctan(1)$$
$$\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

8. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

   a) Zeigen Sie, daß $|f|$ integrierbar ist.

   b) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar heißt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $t, T : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit Stützstellen $\{c_i\}$, für welche gilt,

$$t \leq f \leq T$$

und

$$\sum_i (c_{i+1} - c_i)(T(c_i) - t(c_i)) = \sum_i (c_{i+1} - c_i)T(c_i) - \sum_i (c_{i+1} - c_i)t(c_i) \leq \varepsilon.$$

(Die Treppenfunktionen sind hier so gemeint, daß sie auf den Intervallen $[c_i, c_{i+1}[$ konstant sind.)
Die Treppenfunktionen $\tilde{T}, \tilde{t} : [a, b] \to \mathbb{R}$ werden folgendermaßen definiert:

$$\tilde{T}(x) := \max(|t(x)|, |T(x)|),$$
$$\tilde{t}(x) := \begin{cases} t(x) & \text{falls } 0 < t(x) \leq T(x), \\ 0 & \text{falls } t(x) \leq 0 \leq T(X), \\ |T(x)| & \text{falls } t(x) \leq T(x) < 0. \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, gilt,

$$\tilde{t} \leq |f| \leq \tilde{T}$$

und

$$\tilde{T}(c_i) - \tilde{t}(c_i) \leq T(c_i) - t(c_i),$$

also

$$\sum_i (c_{i+1} - c_i)(\tilde{T}(c_i) - \tilde{t}(c_i)) \leq \sum_i (c_{i+1} - c_i)(T(c_i) - t(c_i)) \leq \varepsilon.$$

Damit ist $|f|$ integrierbar.

b)

$$
\begin{aligned}
-|f| &\leq f \leq |f| \\
\implies -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| &\leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \\
\iff \left|\int_a^b f\right| &\leq \int_a^b |f|
\end{aligned}
$$