MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Klausur
04.07.07

Klausur zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV)

Name ____________________

Matrikelnummer ____________________

	1	2	3	4	5	6	7	gesamt
Punkte								/28

1. Gegeben sei die Kurve

$$K : [0, \frac{4}{3}] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, t^{\frac{3}{2}}).$$

a) Berechnen Sie die Tangentialvektoren für $t \in \{0, 1\}$, (Punkte: 1)

b) skizzieren Sie K und die Tangentialvektoren aus a) und (1)

c) berechnen Sie die Länge von K.
(Hinweis: Substitution $u := 1 + \frac{9}{4}t$.) (2)

a) $(t', t^{\frac{3}{2}'}) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$. Für $t = 0$ ergibt sich $(1, 0)$ und für $t = 1$ $(1, \frac{3}{2})$.

b)

c)

$$\int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1^2 + (\frac{3}{2}\sqrt{t})^2} dt = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \int_1^4 \sqrt{u} \frac{du}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}|_1^4$$
$$= \frac{8}{27}(4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{8}{27}(8 - 1) = \frac{56}{27}$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorformel die Ungleichung

$$-\frac{2}{3}e|x^3| \leq e - \frac{e}{2}x^2 - e^{\cos x} \leq \frac{2}{3}e|x^3|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. (4)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{\cos x}$ ist beliebig oft differenzierbar, und für die Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) =& e^{\cos x}(-\sin x),\\
f''(x) =& e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x),\\
f'''(x) =& e^{\cos x}(-\sin^3 x + \cos x \sin x + 2 \sin x \cos x + \sin x)\\
=& e^{\cos x}(\sin x \cos x(3 + \cos x)).
\end{aligned}$$

Entwicklung der Taylorreihe an der Stelle 0 führt zu

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(\xi)\\
e^{\cos x} &= e + x \cdot 0 - \frac{x^2}{2}e + \frac{x^3}{6}f'''(\xi)
\end{aligned}$$

für ein ξ zwischen 0 und x.

$$\begin{aligned}
e - \frac{x^2}{2}e - e^{\cos x} &= -\frac{x^3}{6}f'''(\xi)\\
|e - \frac{x^2}{2}e - e^{\cos x}| &= |-\frac{x^3}{6}f'''(\xi)|\\
&= \frac{|x^3|}{6}|e^{\cos \xi}(\sin \xi \cos \xi(3 + \cos \xi))|\\
&= \frac{|x^3|}{6}|e^{\cos \xi}||\sin \xi \cos \xi||3 + \cos \xi|\\
&\leq \frac{|x^3|}{6}e \cdot 1 \cdot 4 = \frac{2}{3}e|x^3|
\end{aligned}$$

3. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^3}$$

auf Konvergenz.

(Hinweis: Partielle Integration oder Substitution.) (3)

Die Funktion $f : [2, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x(\ln x)^3}$ ist monoton fallend und positiv, damit kann das Integralvergleichskriterium angewandt werden.

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x} \frac{1}{(\ln x)^3} dx &= \ln x \frac{1}{(\ln x)^3} |_2^\infty - \int_2^\infty \ln x \frac{-3}{(\ln x)^4 x} dx \\
&= \frac{1}{(\ln x)^2} |_2^\infty - \int_2^\infty \frac{-3}{(\ln x)^3 x} dx \\
\int_2^\infty \frac{1}{x} \frac{1}{(\ln x)^3} dx &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\ln x)^2} |_2^\infty = -\frac{1}{2}(0 - \frac{1}{(\ln 2)^2})
\end{aligned}$$

Weil das Integral konvergiert, konvergiert auch die Reihe.

4. *(Nach Staatsexamen Herbst 2003.)* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := 3x^2 - 2xy + 3y^2.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f. (2)

b) Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von f auf der Kreislinie $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.
(Hinweis: Stellen Sie f mittels $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ in Polarkoordinaten dar und setzen Sie $r = 1$.) (2)

c) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $f(x, y) \geq 2(x^2 + y^2)$. (1)

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 6y$$

$$\frac{\partial\partial f}{\partial x\partial x} = 6 \qquad \frac{\partial\partial f}{\partial y\partial y} = 6 \qquad \frac{\partial\partial f}{\partial y\partial x} = -2$$

$$\mathrm{grad} f = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0), \qquad \mathrm{Hess} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ positiv definit,}$$

also haben wir ein Minimum.

b) $f : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}$, $f(r, \varphi) = r^2(3\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi + 3\sin^2\varphi) = r^2(3 - 2\cos\varphi\sin\varphi)$. Für $r = 1$ ergibt sich $f_1(\varphi)' = -2(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \pm\cos\varphi$. Also $\varphi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4},\}$ außerdem müssen wir die Anschlussstelle $\varphi = 0$ als Möglichkeit in Betracht ziehen. An den 5 Stellen werden nacheinander die Werte $(2, 4, 2, 4, 3)$ angenommen, also Min=2, Max=4.

c) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2(x^2 + y^2) + (x - y)^2 \geq 2(x^2 + y^2)$

5. *(Nach Staatsexamen Frühjahr 2001.)* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{(x+1)y^4 \cos y}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Ist f

   i. partiell differenzierbar in $(0,0)$ nach der zweiten Variablen? (1)

   ii. stetig in $(0,0)$? (1)

b) Begründen Sie, warum stetige partielle Differenzierbarkeit nach beiden Variablen a)ii. widerspräche. (1)

a) Für $x = 0$ erhalten wir die Funktion

$$f(0,y) = \begin{cases} \frac{y^4 \cos y}{(y^2)^2} = \cos y & \text{für } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Da der Kosius bei 0 den Wert 1 annimmt, ist diese nicht stetig und insbesondere nicht differnzierbar bei 0.

b) Stetig paritell differnzierbar $\Rightarrow$ total differenzierbar $\Rightarrow$ stetig.

6. a) Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Begründen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen, oder widerlegen Sie sie durch Gegenbeispiele:

   i. Ist f integrierbar, so ist f auch differenzierbar. (1)

   ii. Ist f differenzierbar, so ist f auch integrierbar. (1)

   iii. Ist f stetig und gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, so ist f beschränkt. (1)

   iv. Ist f differenzierbar und gilt $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, so ist f beschränkt. (1)

   b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(x, y)$ zweimal partiell differenzierbar. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass

$$\frac{\partial\partial g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\partial g}{\partial x \partial y}$$

   gilt. (1)

a) i. Gegenbeispiel: $f(x) := |x - 1|$.

   ii. differenzierbar $\Rightarrow$ stetig $\Rightarrow$ integrierbar.

   iii. $\exists x_0 : |f(x)| \leq 1 \forall x \geq x_0$, und im abgeschlossenen Intervall $[0, x_0]$ nimmt f ihr Maximum max und Minimum min an $\Rightarrow |f(x)| \leq \max(1, |max|, |min|)$ $\forall x \in [0, \infty[$.

   iv. Gegenbeispiel: $f(x) := \ln(x + 1)$.

b) Alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 müsssen stetig sein.

7. Geben Sie die Definitheit folgender Matrizen an:

$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ☐ positiv definit ☐ negativ definit ☐ indefinit

$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ positiv definit ☐ negativ definit ☐ indefinit

$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ positiv definit ☐ negativ definit ☐ indefinit

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ positiv definit ☐ negativ definit ☐ indefinit

(4)

$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ☐ positiv definit ■ negativ definit ☐ indefinit

$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ positiv definit ☐ negativ definit ■ indefinit

$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ■ positiv definit ☐ negativ definit ☐ indefinit

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ positiv definit ■ negativ definit ☐ indefinit

Viel Erfolg!