MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 9
13.06.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV)

33. Gegeben sei die Funktion

$$f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^3 + 3xy^2 - 3xy.$$

a) Man bestimme den Gradienten $\operatorname{grad} f(x,y)$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(x,y)$ der Funktion f für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Man zeige, dass f genau vier kritische Punte besitzt, nämlich $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

c) Man untersuche f auf lokale Extremstellen und Sattelpunkte.

34. *(Staatsexamen Frühjahr 2005.)* Gegeben sei die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{y^2} - \frac{y^2}{16}$$

mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$.

a) Man bestimme alle lokalen Extrema von f.

b) Ist f nach oben beschränkt?

35. Man bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f :]0,\infty[\times]0,\infty[, \qquad f(x,y) := \frac{x-y}{x+y},$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung.

36. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine symmetrische 2×2-Matrix. Weiter sei D die Determinante von A, also $D = ac - b^2$.
Man beweise direkt ohne Benutzung des Determinantenkriteriums von Hurwitz/Jacobi:

a) A ist positiv definit, falls $a > 0$ und $D > 0$.

b) A ist negativ definit, falls $a < 0$ und $D > 0$.

c) A ist indefinit, falls $D < 0$.

(Hinweis: Bedenken Sie, dass positiv definit bedeutet, dass

$$a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 =< \xi, A\xi >> 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und betrachten Sie

$$a[(\xi_1 + \frac{b}{a}\xi_2)^2 + \frac{\xi_2^2}{a^2}(ac - b^2)].)$$

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 20. Juni 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).