MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 8
06.06.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV)

29. *(Staatsexamen Frühjahr 1999.)* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion f stetig ist. (Hinweis: $|\sin(x)| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

   b) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$. (Hinweis: $\frac{\sin(x^3)}{x^2+y^2}$ muss dafür nicht differnziert werden.)

30. Sei f wie in Aufgabe 22) von letzter Woche.

   a) Ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig im Ursprung?

   b) Begründen Sie, dass Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ 22)b) widerspräche.

31. a) Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{||x||}$ zeige man: $\nabla \times \nabla f = 0$.

   b) Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{||x||^2}$ zeige man: $\nabla \times \nabla f = 0$.

   c) Sei U offen in $\mathbb{R}^3$ und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Welche zusätzliche Eigenschaft von f muss erfüllt sein, damit gilt: $\nabla \times \nabla f = 0$? (Begründung!)

   d) Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{||x||}$ zeige man: $< \nabla, \nabla f >= 0$.

   e) Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{||x||^2}$ zeige man: $< \nabla, \nabla f > \neq 0$.

   (Wobei $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ bezeichnet.)

32. *(Staatsexamen Herbst 1994.)* Man beweise mit Hilfe der Taylorformel die Ungleichung

$$0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{8} 10^{-4}$$

   für alle $x \in [0, \frac{1}{100}]$.
   (Hinweis: Machen Sie sich Gedanken über $\sqrt{1+x}$.)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 13. Juni 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).