MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 7
30.05.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung II (NV)

21. *(Staatsexamen Herbst 2000.)* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion und a, b, c reelle Zahlen, wobei $a \neq 0$. Die Funkiton $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch
$$f(x,y) := \phi(ay - bx)\exp(-\frac{cx}{a}).$$
Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:
$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + cf(x,y) = 0.$$

22. *(Staatsexamen Herbst 1995.)* Gegeben sie die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Man zeige:
    a) Für jedes $u = (x_u, y_u) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ ist die Funktion $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_u(t) := f(tx_u, ty_u)$, differenzierbar an der Stelle 0.
    b) f ist nicht stetig an der Stelle (0,0).
    (Hinweis: Dazu nähere man sich dem Ursprung mit einer geeigneten Folge.)

23. *(Staatsexamen Frühjahr 1995.)* Sei $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-1,-1) = -1, f(-1,1) = 0 = f(1,-1), f(1,1) = 1$. Man zeige, dass f in $[-1,1] \times [-1,1]$ noch unendlich viele Nullstellen hat.
(Hinweis: Man helfe sich mit einer Skizze und dem Zwischenwertsatz.)

24. *(Staatsexamen Frühjahr 2001.)* Man entwickle die beiden Funktionen
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto e^x \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{x}$$
an der Stelle 2 in einer Taylorreihe und gebe die Konvergenzintervalle dieser Reihen an.
(Hinweis: Die Konvergenzintervalle umfassen diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Taylorreihen konvergieren (Quotientenkriterium).)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 06. Juni 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).