MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

SoSe 2007
Blatt 6
23.05.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)

21. a) *(Staatsexamen Herbst 1991.)* Der Handlauf des Geländers einer Wendeltreppe beschreibe die Raumkurve

$$\gamma_a : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma_a(t) = (\cos t, \sin t, at)$$

für einen festen Parameter $a > 0$. Der Architekt hat für den Handlauf ein Band der Länge 7 m bereitgestellt. Wie groß darf a höchstens sein, damit das bereitgestellte Band reicht?

b) *(Staatsexamen Frühjahr 2003.)* Gegeben sei die Kurve

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3, 0 \le x \le 4\}.$$

Skizzieren Sie K und bestimmen Sie ihre Länge.
(Hinweis: Substitution.)

22. a) *(Staatsexamen Frühjahr 2006.)*

i. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$$

ist.

ii. Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto t \cdot (\cos t, \sin t).$$

iii. Skizzieren Sie die Bildmenge $\gamma([0, 6\pi])$.

b) *(Staatsexamen Herbst 2006.)* Gegeben sei die Kurve $C : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$C(t) = (x(t), y(t)), \qquad x(t) = \frac{t^6}{6}, \qquad y(t) = 2 - \frac{t^4}{4}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge von C zwischen den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.
(Hinweis: Substitution $s := t^4 + 1$.)

23. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

a) Man zeige, dass f partiell differenzierbar ist und bestimme die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x)$ und $\partial_2 f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

b) Man zeige, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, im Nullpunkt aber $\partial_1 \partial_2 f(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0,0)$ gilt.

c) Ist f stetig an der Stelle $(0,0)$?

(Hinweis: Die Ableitungen im Ursprung müssen mit dem Differntialquotienten berechnet werden.)

24. *(Staatsexamen Herbst 1991.)* Unter der allgemeinen Voraussetzung, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differnzierbare Funktion ist, widerlege oder beweise man jede der folgenden sechs Aussagen:

a) Wenn $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0 = \lim_{x \to \infty} f'(x)$ gilt, so ist f' beschränkt.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ist $f(A)$ offen.

c) Ist $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $f(A)$ abgeschlossen.

d) Ist $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $f(A)$ beschränkt.

e) Besitzt f eine Umkehrfunktion, so ist diese stetig differenzierbar.

f) Ist f beschränkt, so gilt $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 30. Mai 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).