Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung II (NV)

5. *(Staatsexamen Frühjahr 2001)* Geben Sie Beispiele für Funktionen mit den folgenden Eigenschaften an oder begründen Sie, dass keine solche Funktion existiert.

   a) $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, aber nicht stetig;

   b) $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht beschränkt;

   c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht differnzierbar;

   d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differnezierbar, aber f_4' ist nicht stetig.

6. Berechnen Sie

   a) mit partieller Integration
   $$\int 1 \cdot ln(x) dx,$$

   und mit Hilfe der Substitutionsmethode

   b)
   $$\int x \ln(x^2) dx \qquad (t = x^2),$$

   c)
   $$\int_0^2 x \cos(x^2 + 1) dx \qquad (t = x^2 + 1),$$

   d)
   $$\int_0^1 e^x \sqrt{e^x - 1} dx \qquad (t = \sqrt{e^x - 1}).$$

7. *(Staatsexamen Herbst 2005)* Beweisen Sie für $0 < x < 1$ die Gleichheit
   $$\int_x^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1 + t^2}$$
   und leiten Sie hieraus eine Funktionalgleichung für den Arcustangens her.

8. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

   a) Zeigen Sie, daß $|f|$ integrierbar ist.

b) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

Abgabe bis Mittwoch, den 02. Mai 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).