MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 13
31.01.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung I (NV) Lösungsvorschlag

49. a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x,$$

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2$$
$$=3x^2,$$

c)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+h}\right)^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^2x^2}$$
$$=\frac{-2}{x^3}.$$

50. $f(x)=x+e^x$ steigt strikt monoton, denn

$$x<y$$
$$x+e^x<y+e^y.$$

Sie hat nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle, weil sie stetig ist, und $f(-1)=-1+\frac{1}{e}<0$ und $f(0)=1>0$.

51. a) Weil $2e^x-x=2+x+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^3}{3!}+\cdots$, gilt für $0\le x<y$

$$2e^x-x<2e^y-y.$$

Also ist f strikt monoton steigend. Aus der Stetigkeit und $f(0)=2$ sowie $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ folgt die Behauptung.

b) Dies folgt aus der Monotonie, der Differenzierbarkeit und aus $f'(x)=2e^x-1>0$ für $x>0$.

c) O.B.d.A sei $x > y$. Setze $a := f^{-1}(x)$ und $b := f^{-1}(y)$. Es gilt $a > b$.

$$
\begin{aligned}
a - b &< (a-b) + 2(\frac{a^2}{2!} - \frac{b^2}{2!}) + 2(\frac{a^3}{3!} - \frac{b^3}{3!}) + \cdots \\
a - b &< 2 + a + 2\frac{a^2}{2!} + 2\frac{a^3}{3!} + \cdots - (2 + b + 2\frac{b^2}{2!} + 2\frac{b^3}{3!} + \cdots) \\
a - b &< f(a) - f(b) \\
f^{-1}(x) - f^{-1}(y) &< x - y
\end{aligned}
$$

52.

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\ln(x)}\right)' = e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \frac{\frac{1}{x}x - 1\ln(x)}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Die Ableitung wird genau dann 0, wenn $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Die Funktion ist also links von e streng monoton und ebenso rechts von e. Wegen $\lim_{x \searrow 1} f(x) = 1 = \lim_{x \to \infty} f(x)$ wird jeder Wert 2x angenommen außer dem im Extremum $(e|\sqrt[e]{e})$.