MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 10
17.01.2007

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung I (NV) Lösungsvorschlag

41. a)

$$\begin{aligned}
x &< y \\
e^{x+y} + e^x &< e^{x+y} + e^y \\
e^x(e^y+1) &< e^y(e^x+1) \\
\frac{e^x}{e^x+1} &< \frac{e^y}{e^y+1} \\
\frac{e^{x+1}}{e^x+1} &< \frac{e^{y+1}}{e^y+1}
\end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x+1} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} e\frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = e\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = e.$$

Aus der Stetigkeit und Monotonie folgt, dass $W =]0, e[$.

c) Die Umkehrbarkeit folgt aus der strikten Monotonie, d.h. Injektivität.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{e^{y+1}}{e^y+1} \\
x(e^y+1) &= e^{y+1} \\
e^y(x-e) &= -x \\
e^y &= \frac{-x}{x-e} \\
y &= \ln\frac{x}{e-x}
\end{aligned}$$

für $x \in]0, e[$.

42. a) Ausgeschlossen werden müssen wegen der Bruchstriche 0 und $\frac{1}{4}$, wegen der Logarithmen ist zugelassen:

$$\frac{x+4}{4x-1} > 0$$

ist erfüllt wenn Zähler und Nenner positiv sind, d.h $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$ und $4x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$ oder beide negativ, d.h. $x<-4$ und $x<\frac{1}{4}$, also $x>\frac{1}{4}$ oder $x<-4$.

$$\frac{x+2}{3x} > 0$$

ist erfüllt, wenn $x<-2$ oder $x>0$.
Alles in allem erhalten wir: $D_f =]-\infty,-4[\cup]\frac{1}{4},\infty[$.

b)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x+4}{4x-1} + \ln\frac{x+2}{3x} + \ln 3 = \ln\frac{1}{4} + \ln\frac{1}{3} + \ln 3 = \ln\frac{1}{4}\frac{1}{3}3 = -2\ln 2$$

$$\lim_{x\nearrow -4} \ln\frac{x+4}{4x-1} + \ln\frac{x+2}{3x} + \ln 3 = \lim_{x\nearrow -4} \ln\frac{x+4}{4x-1} + \ln\frac{-2}{-12} + \ln 3 = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow \frac{1}{4}} \ln\frac{x+4}{4x-1} + \ln\frac{x+2}{3x} + \ln 3 = \lim_{x\searrow \frac{1}{4}} \ln\frac{x+4}{4x-1} + \ln\frac{\frac{1}{4}+2}{3\frac{1}{4}} + \ln 3 = -\infty$$

c)

$$\ln\frac{(x+4)(x+2)3}{(4x-1)(3x)} = \ln\frac{x+4}{4x-1} + \ln\frac{x+2}{3x} + \ln 3 = 0$$

$$\frac{(x+4)(x+2)3}{(4x-1)(3x)} = 1$$

$$(x+4)(x+2) = (4x-1)x$$

$$3x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{7\pm\sqrt{49+96}}{6} = \frac{7\pm\sqrt{145}}{6},$$

wobei $\frac{7-\sqrt{145}}{6}$ nicht in D_f liegt.

43. In der Vorlesung kam vor, dass $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$.

a)

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{x\to\infty} (-x)^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^n}{e^x} = (-1)^n \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$$

b)

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln x = \lim_{x\to-\infty} e^x \ln e^x = \lim_{x\to-\infty} e^x x = 0$$

nach a).

44. a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$$

nach a).