MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 10
10.01.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung I (NV)
Lösungsvorschlag

37. a) Beide Parabeln sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$, damit ihre Einschränkungen, zu untersuchen bleibt $x = -1$:

$$\lim_{x\searrow -1} f(x) = \lim_{x\searrow -1} a(x+1)^2 + a + 1 = a + 1 = -(x+1)^2 + a + 1 = f(-1).$$

Damit ist f stetig.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -(x+1)^2 + a + 1 = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a(x+1)^2 + a + 1 = \infty,$$

da $a > 0$. Daher gibt es für jedes $s > 0$ $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < -s$ und $f(b) > s$, wegen der Stetigkeit werden mit dem Zwischenwertsatz auch alle Werte aus $[-s, s]$ angenommen. $\Longrightarrow W_f = \mathbb{R}$.

c) Wie man leicht sieht, haben beide Parabeln ihren Scheitel bei -1. Die nach unten geöffnete Parabel $-(x+1)^2 + a + 1$ steigt also strikt monoton in $]-\infty, -1]$, ebenso die nach oben geöffnete $a(x+1)^2 + a + 1$ in $[-1, \infty[$. Also steigt f strikt monoton auf ganz $\mathbb{R}$ und ist umkehrbar. f^{-1} berechnet sich wie folgt:

$$x = -(y+1)^2 + a + 1$$
$$a + 1 - x = (y+1)^2$$
$$\pm\sqrt{a+1-x} = y + 1$$
$$\pm\sqrt{a+1-x} - 1 = y$$

und

$$x = a(y+1)^2 + a + 1$$
$$\frac{x-a-1}{a} = (y+1)^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{x-1}{a} - 1} = y + 1$$
$$\pm\sqrt{\frac{x-1}{a} - 1} - 1 = y.$$

Weil f^{-1} wie f steigen muß, machen die - keinen Sinn, und wir erhalten:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{a+1-x} - 1 & \text{falls } x \leq a+1, \\ \sqrt{\frac{x-1}{a} - 1} - 1 & \text{falls } x > a+1. \end{cases}$$

38. a) i. Das folgt daraus, dass e^x steigt und e^{-x} fällt.

ii.

$$\begin{aligned} 0 \leq x &< y \\ 1 \leq e^x &< e^y \\ e^x(e^{x+y} - 1) &< e^y(e^{x+y} - 1) \\ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &< \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \end{aligned}$$

b) i. $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty$, wegen der Stetigkeit ist ihr Wertebereich also ganz $\mathbb{R}$, sinh ist damit surjektiv, die Injektivität folgt aus a).

ii. Die Injektivität folgt aus a). $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$, wegen der Stetigkeit ist ihr Wertebereich also ganz $[1, \infty[$, also surjektiv.

c) i.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ (e^y)^2 - 2xe^y - 1 &= 0 \\ e^y_{1/2} &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1} > 0, \end{aligned}$$

deshalb macht das - keinen Sinn, und wir erhalten:

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

ii. Ebenso.

39. $g(0) = 0f(0) = 0$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $\delta > 0$ finden, so dass $|g(x) - 0| < \varepsilon$ für $|x - 0| < \delta$. Sei C eine Schranke für f, d.h. $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$ für $|x| < \delta$:

$$|g(x) - 0| = |xf(x)| = |x||f(x)| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.$$

40. a) $f(x) = f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x) = f(\frac{1}{2}x)f(\frac{1}{2}x) = (f(\frac{1}{2}x))^2 \geq 0$.

b) $f(x) = f(x - 1 + 1) = f(x-1)f(1) = 0$.

c) $f(0)a = f(0)f(1) = f(0+1) = f(1) = a \Longrightarrow f(0) = 1$.

d) Anfang: $f(1) = a$, Schritt: $f(n+1) = f(n)f(1) = a^n a = a^{n+1}$.

Dazu verschieben wir die Funktion so, dass der Punkt (a, b) im Ursprung landet, und erhalten

$$f(x + a) - b.$$

Für die muß jetzt die Bedingung erfüllt sein, d.h.

$$f(-x + a) - b = -(f(x + a) - b),$$

also

$$f(-x + a) = -f(x + a) + 2b.$$