

Übungen zur Vorlesung Differential- und Integralrechnung I (NV) Lösungsvorschlag

29. a) i. $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x + c)$; ihr Graph geht aus G_f hervor durch Verschiebung um c nach links.
 $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + c$; ihr Graph geht aus G_f hervor durch Verschiebung um c nach oben.
- ii. $f \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$; ihr Graph geht aus G_f hervor durch Spiegelung an der y -Achse.
 $h \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -f(x)$; ihr Graph geht aus G_f hervor durch Spiegelung an der x -Achse.
- iii. $f \circ i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(\lambda x)$; ihr Graph geht aus G_f hervor durch Stauchung in x -Richtung um den Faktor λ (d.h. Streckung um $\frac{1}{\lambda}$).
 $i \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda f(x)$; ihr Graph geht aus G_f hervor durch Streckung in y -Richtung um den Faktor λ .

30. a) $b = 5$:

$$2 > \frac{4}{3} \geq 1 \implies 1, \dots$$

$$\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{5} > \frac{1}{3} \geq \frac{1}{5} \implies 1, 1 \dots$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{4}{25} > \frac{2}{15} \geq \frac{3}{25} \implies 1, 13 \dots$$

b) $b = 3$:

$$2 > \frac{4}{3} \geq 1 \implies 1, \dots$$

$$\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{3} > \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} \implies 1, 1$$

$$\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

c) $b = 2$:

$$2 > \frac{4}{3} \geq 1 \implies 1, \dots$$

$$\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2} > \frac{1}{3} \geq \frac{0}{2} \implies 1, 0 \dots$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{3}{4} > \frac{7}{6} \geq \frac{4}{4} \implies 1, 01 \dots$$

$$\text{d) } \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} > \frac{1}{12} \geq \frac{0}{8} \implies 1,010\dots$$

$$\frac{1}{12} - \frac{0}{8} = \frac{1}{12} \\ \frac{2}{16} > \frac{1}{12} \geq \frac{1}{16} \implies 1,0101\dots$$

Weil die letzten 4 Zeilen aus denen davor durch Multiplikation mit $\frac{1}{4}$ hervorgehen, geht das immer so weiter $\implies 1,0\overline{1}$.

$$\begin{aligned} 31. \quad \text{a) } (1+i)^{-1} &= \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}(1-i) \\ (1+i)^2 &= 1+2i+i^2 = 2i \\ (1+i)^4 &= (2i)^2 = -4 \\ (1+i)^{2006} &= ((1+i)^4)^{501}(1+i)^2 = (-4)^{501}2i = -2^{1003}i \end{aligned}$$

b) Gesucht sind $(a+bi) \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $(a+bi)^3 = 1$. Die einzige reelle Lösung ist $1 = (1+0i)$. Daher können wir im Folgenden von $b \neq 0$ ausgehen.

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = 1$$

$$\implies a^3 - 3ab^2 = 1 \text{ und } 3a^2b - b^3 = 0$$

$$\implies b^2 = 3a^2$$

$$\implies a^3 - 3a3a^2 = -8a^3 = 1 \implies a^3 = -\frac{1}{8} \implies a = -\frac{1}{2}$$

$$\implies b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Also sind die Lösungen $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, was man auch so schreiben kann:

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right).$$

32. a) Wir wissen, daß $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Nach Definition gibt es also eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, was gleichbedeutend ist mit einer Folge

$$(q_1, q_2, \dots)$$

mit $q_i \in \mathbb{Q}$, in welcher alle Elemente aus $\mathbb{Q}$ vorkommen. Mit Hilfe dieser Folge und dem Diagonalverfahren läßt sich nun eine Folge bilden, in der alle Elemente aus $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ vorkommen:

$$\begin{array}{ccccccc} (q_1, q_1) & \longrightarrow & (q_1, q_2) & & (q_1, q_3) & \longrightarrow & (q_1, q_4) \quad \cdots \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ (q_2, q_1) & & (q_2, q_2) & & (q_2, q_3) & & \\ \downarrow & \nearrow & & \searrow & & & \\ (q_3, q_1) & & (q_3, q_2) & & (q_3, q_3) & & \\ & \searrow & & & & & \\ (q_4, q_1) & & (q_4, q_2) & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

b) Der Anfang ist: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Der Schritt geht wie oben mit $\mathbb{Q}^{n-1} \times \mathbb{Q}$ statt $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Angenommen, es gäbe eine Folge $(A_1, A_2, \dots)$ mit $A_i \subset \mathbb{N}$, in der alle Teilmengen von $\mathbb{N}$ vorkommen. Wir konstruieren folgende Teilmenge $B \subset \mathbb{N}$:

$$B := \{n \in \mathbb{N} | n \notin A_n\}.$$

Für B gilt nun, daß es sich von jedem A_i unterscheidet, also war sie nicht in der Folge enthalten. Daher sind die (unendlichen) Teilmengen von $\mathbb{N}$ nicht abzählbar.