MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 4
15.11.2006

Übungen zur Vorlesung Differential– und Integralrechnung I (NV) Lösungsvorschlag

13. a)

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}(n-k)\cdots 1}{\underbrace{n\ n\ \cdots\ n}_{k \text{ Faktoren}}(n-k)\cdots 1} \le \frac{1}{k!}$$

b)

$$2 = 1 + n\frac{1}{n} \le^{\text{Bernoulli}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

nach a).

14. a)

$$a_n = \frac{23n^2+2n-3}{11n^2+12} = \frac{n^2(23+2\frac{1}{n}-3\frac{1}{n^2})}{n^2(11+12\frac{1}{n^2})} = \frac{23+2\frac{1}{n}-3\frac{1}{n^2}}{11+12\frac{1}{n^2}}.$$

Weil $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{23}{11}$.

b)

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

nach Aufgabe 1)b) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

15. a)

$$\lim_{n\to\infty} 5n^7 = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} 3n^{-2} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} 5n^7 3n^{-2} = \infty$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} 4^n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} -2^{-n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} -4^n 2^{-n} = -\infty$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} (-2)^{-n} = 0,$$

die Folge ist beschränkt, weil $-1 \leq 2^n(-2)^{-n} \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$, divergiert aber, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ $|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2$.

16. a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\Leftrightarrow$ für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$
$\Leftrightarrow$ für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|(a_n - a) - 0| < \epsilon$ für alle $n \geq N$
$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$.

b) Das stimmt nicht, weil z.B. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

stets > 0 ist, dennoch ist ihr Grenzwert $= 0$.