MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Günther Kraus

WS 2006/07
Blatt 12
17.01.2007

Übungen zur Vorlesung
Differential– und Integralrechnung I (NV)

45. a) Für $x \notin \{(z+\frac{1}{2})\pi | z \in \mathbb{Z}\}$ ist der Tangens definiert als $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, und die Umkehrfunktion des Sinus $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ wird als Arcussinus arcsin bezeichnet. Zeigen Sie:

    i.
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)},$$

    ii.
$$\arcsin(x)+\arcsin(y) = \arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

    b) Zeigen Sie:

    i.
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

    ii.
$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

8 Punkte

46. Bedenken Sie, dass $\sin(x) = \cos(x-\frac{\pi}{2})$, werfen Sie einen Blick auf die Eulersche Formel, und berechnen Sie sodann:

    a)
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

    b)
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

    c)
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

4 Punkte

47. Laut Aufgabe 27)b) hat die Gleichung $x^3 = 1$ in $\mathbb{C}$ die 3 Lösungen $\{1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$.

    a) Folgern Sie die 3 Lösungen in $\mathbb{C}$ von $x^3 = -1$ und

    b) berechnen Sie mit Hilfe der Definition $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

i.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

ii.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

iii.

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

5 Punkte

48. Beachten Sie, dass das Quotientenkriterium im Komplexen genauso funktioniert wie im Reellen, nur mit dem Unterschied, dass der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definiert ist als $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

   a) Zeigen Sie damit die Konvergenz der Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+2i)^n}.$$

   b) Falls $|z| < 1$ bleibt auch die Formel für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ im Komplexen erhalten. Sei

   $$a_n := \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \qquad (n \geq 0).$$

   i. Tragen Sie in eine Skizze der kompexen Ebene $\mathbb{C}$ $a_0, \ldots, a_4$ sowie $\sum_{n=0}^{1} a_n, \ldots, \sum_{n=0}^{4} a_n$ ein,

   ii. zeigen Sie, dass

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

   konvegiert und

   iii. berechnen Sie ihren Grenzwert.

4 Punkte

Abgabe bis Mittwoch, den 24. Januar 2007, 11^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek oder in der Vorlesung).

Übungen Alexander Böhm, Mittwoch 13^{00} Uhr, B040,
Volker Wittmann, Mittwoch 16^{15} Uhr, B004,
Daniel Bembé, Freitag 9^{15} Uhr, B004,
Sprechstunden jeweils nach den Übungen,
Sprechstunde Prof. Kraus Mittwoch und Freitag 13^{15} Uhr, 401.