Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Extrablatt 3: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Hausaufgaben

Aufgabe E3.1

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $0 < \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n X_k^2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1).$$

Lösung. Wir setzen $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2]$. Definiere zudem $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ und $T_n = \sum_{k=1}^n X_k^2$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ und nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt $T_n/n \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2$, also $\sqrt{T_n/n} \xrightarrow{\text{f.s.}} \sigma$. Verwenden wir also Satz 5.6.3, so erhalten wir

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n X_k^2}} = \frac{S_n/\sqrt{n}}{\sqrt{T_n/n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z,$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)/\sigma = \mathcal{N}(0,1)$.

Aufgabe E3.2

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Ber}(p_n)$, wobei $p_n \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das zugehörige zentrierte und normierte Dreiecksschema $\big((Y_{n,k})_{k=1}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$Y_{n,k} = \frac{X_k - \mathbb{E}[X_k]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]}}$$

die Lindeberg-Bedingung genau dann erfüllt, wenn $\sum_{n\geq 1} p_n(1-p_n) = \infty$.

Lösung. Es ist

$$Y_{n,k} = \frac{X_k - p_k}{\sqrt{v_n}},$$

wobei $v_n = \sum_{k=1}^n p_k(1-p_k)$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$L_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[Y_{n,k}^2 \cdot \mathbb{1}_{\{Y_{n,k}^2 > \varepsilon\}}\right] = \frac{1}{v_n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[(X_k - p_k)^2 \cdot \mathbb{1}_{\{(X_k-p_k)^2 > \varepsilon v_n\}}\right].$$

Wir sehen, dass $(X_k - p_k)^2 \in [0,1]$. Gilt nun $v_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, so wird der Indikator für n groß genug Null, die Summe ist also endlich und $L_n(\varepsilon) \to 0$ wegen des Faktors $1/v_n$. Ebenso direkt sieht man ein, dass $L_n(\varepsilon) \not\to 0$ für $v_n \not\to \infty$.

Aufgabe E3.3

Sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = \infty$. Zeigen Sie, dass eine P-fast-sicher eindeutige, $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable $0 \leq Y \leq \infty$ existiert, sodass

$$\int_A X \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{F}.$$

Lösung. Wir definieren $X_M = X \wedge M$ und $Y_M = \mathbb{E}[X_M \mid \mathcal{F}]$ für $M \in \mathbb{N}$. Wegen 8.6 D) ist Y_M eine monoton steigende Folge und es folgt die Existenz einer Zufallsvariable $Y \in [0, \infty]$ mit $Y_M \nearrow Y$. Sei nun $A \in \mathcal{F}$. Aus der Definition der bedingten Erwartung folgt

$$\int_A X \wedge M \, \mathrm{d}P = \int_A Y_M \, \mathrm{d}P,$$

also ergibt sich mit dem Satz der monotonen Konvergenz, dass

$$\int_A X \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P.$$

Aufgabe E3.4

Beweisen Sie folgende bedingte Form der Chebyshev-Ungleichung: Für $c > 0$ gilt

$$P(|X| \geq c \mid \mathcal{F}) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}]}{c^2}.$$

Lösung. Da $P(|X| \geq c \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|X| \geq c\}} \mid \mathcal{F}]$ folgt die Aussage aus der Beobachtung

$$\mathbb{1}_{\{|X| \geq c\}} \leq \frac{X^2}{c^2}$$

zusammen mit der Monotonie 8.6 D).

Aufgabe E3.5

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem zweiten Moment. Zeigen oder widerlegen Sie, dass X genau dann messbar ist, wenn $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2 \mid \mathcal{F}] = 0$.

Lösung. Betrachte $(\Omega, \mathcal{A}, P) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichne. Weiterhin sei $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega, [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1]\}$ sowie die Zufallsvariable $X = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})} + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} + \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}\}}$.
Da $\mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}\}} = 0$ P-f.s., gilt $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}\}}|\mathcal{F}] = 0$ P-f.s. Weiterhin ist $\frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})} + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ $\mathcal{F}$-messbar. Wir erhalten

$$\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - X)^2] = \mathbb{E}[(\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}\}}|\mathcal{F}]}_{=0} - \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}\}})^2] = 0.$$

Jedoch ist X selbst nicht $\mathcal{F}$-messbar, denn $X^{-1}(\{\frac{7}{4}\}) = \{\frac{1}{2}\}$.

Aufgabe E3.6

Es seien X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $U := (X + Y)/\sqrt{2}$ und $V := (X - Y)/\sqrt{2}$ unabhängig und standardnormalverteilt sind und folgern Sie eine Darstellung von $\mathbb{E}[X^2 \mid X + Y]$.

Lösung. Zunächst ist die charakteristische Funktion von U nach Z10.1 gegeben durch $\varphi_U(t) = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t/\sqrt{2})^2 = (e^{-\frac{t^2}{4}})^2 = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t)$. Ähnlich zeigt man $\varphi_V(t) = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t)$. Weiterhin hat der Zufallsvektor (U,V) die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned}\varphi_{(U,V)}(s,t) &= \mathbb{E}[e^{is\frac{X+Y}{\sqrt{2}}}e^{it\frac{X-Y}{\sqrt{2}}}] = \varphi_X((s+t)/\sqrt{2})\varphi_Y((s-t)/\sqrt{2}) = e^{-\frac{(s+t)^2+(s-t)^2}{4}}\\ &= e^{-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}} = \varphi_U(s)\varphi_V(t).\end{aligned}$$

Da sie faktorisiert, lässt sich die Unabhängigkeit von U und V feststellen. Schreibe

$$X^2 = \left(\frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}U + \frac{1}{\sqrt{2}}V\right)^2.$$

Da $\sigma(X+Y) = \sigma(U)$, ergibt sich aus dieser Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2|X+Y] &= \mathbb{E}\left[\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}U + \tfrac{1}{\sqrt{2}}V\right)^2 \middle| U\right] = \tfrac{1}{2}U^2 + U\mathbb{E}[V|U] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[V^2|U]\\ &= \tfrac{1}{2}U^2 + U\mathbb{E}[V] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[V^2] \qquad \text{(Unabhängigkeit von } U \text{ und } V)\\ &= \tfrac{1}{4}(X+Y)^2 + \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe E3.7

Seien X, Y Zufallsvariablen, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra. X sei weiterhin $\mathcal{G}$-messbar und Y unabhängig von $\mathcal{G}$. Zeigen Sie für alle beschränkten und messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dass

$$\mathbb{E}[f(X,Y) \mid \mathcal{G}] = g(X) \ P\text{-f.s.}, \quad g(x) := \mathbb{E}[f(x,Y)].$$

Hinweis: Eine mögliche Lösung nutzt Z2.1.

Lösung. Betrachte das $\cap$-stabile System $\mathcal{E} := \{A \times B \mid A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, welches $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ erzeugt und $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ enthält. Sei $A \times B \in \mathcal{E}$ und $f := \mathbb{1}_{A\times B}$. Dann ist P-f.s.

$$\mathbb{E}[f(X,Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_A(X)}_{\mathcal{G}\text{-messbar}}\mathbb{1}_B(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{1}_A(X)\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_B(Y)}_{\text{unabh. v. }\mathcal{G}}|\mathcal{G}] = \mathbb{1}_A(X) \cdot P(Y \in B).$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist andererseits $\mathbb{E}[f(x,Y)] = P(Y \in B) \cdot \mathbb{1}\{x \in A\}$. Die Behauptung gilt also für alle Indikatorfunktionen von Elementen aus $\mathcal{E}$. Betrachte nun den Raum $\mathcal{H}$ aller beschränkten und messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die Behauptung gilt. Dieser ist ein Vektorraum (trivial).
Er ist sogar abgeschlossen unter monotoner punktweiser Konvergenz: Sei hierfür $0 \leq (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ mit $f_n \uparrow f$ und f beschränkt. Aus dieser punktweisen Konvergenz folgt insbesondere die $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-Messbarkeit von f. Nach der bedingten Version des Satzes von der monotonen Konvergenz gilt

$$\mathbb{E}[f(X,Y)|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n(X,Y)] = \lim_{n\to\infty} g_n(X),$$

wobei $g_n(x) = \mathbb{E}[f_n(x,Y)]$. Allerdings gilt wiederum wegen der monotonen Konvergenz $\lim_n g_n(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $g(x) = \mathbb{E}[f(x,Y)]$. Dies zeigt $f \in \mathcal{H}$.
Nach Z2.1 gilt also $\mathcal{H} = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.