Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Extrablatt 3

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Abgabe bis spätestens am 24.07.2017. Sie können auch zu zweit abgeben.

Hausaufgaben

Aufgabe E3.1

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $0 < \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n X_k^2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1).$$

Aufgabe E3.2

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Ber}(p_n)$, wobei $p_n \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das zugehörige zentrierte und normierte Dreiecksschema $\big((X_{n,k})_{k=1}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_{n,k} \sim \mathrm{Ber}(p_k)$ die Lindeberg-Bedingung genau dann erfüllt, wenn $\sum_{n\geq 1} p_n(1-p_n) = \infty$.

Aufgabe E3.3

Sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = \infty$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable $0 \leq Y \leq \infty$ existiert, sodass

$$\int_A X \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{F}.$$

Aufgabe E3.4

Beweisen Sie folgende bedingte Form der Chebyshev-Ungleichung: Für $c > 0$ gilt

$$P(|X| \geq c \mid \mathcal{F}) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}]}{c^2}.$$

Aufgabe E3.5

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem zweiten Moment. Zeigen oder widerlegen Sie, dass X genau dann messbar ist, wenn $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2 \mid \mathcal{F}] = 0$.

Aufgabe E3.6

Es seien X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $U := (X+Y)/\sqrt{2}$ und $V := (X-Y)/\sqrt{2}$ unabhängig und standardnormalverteilt sind und folgern Sie eine Darstellung von $\mathbb{E}[X^2 \mid X+Y]$.

Aufgabe Z3.7

Seien X, Y Zufallsvariablen, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra. X sei weiterhin $\mathcal{G}$-messbar und Y unabhängig von $\mathcal{G}$. Zeigen Sie für alle beschränkten und messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dass

$$\mathbb{E}[f(X,Y) \mid \mathcal{G}] = g(X) \ P\text{-f.s.}, \quad g(x) := \mathbb{E}[f(x,Y)].$$

Hinweis: Eine mögliche Lösung nutzt Z2.1.