Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Extrablatt 2: Lösungen

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Abgabe bis spätestens am 10. Juli. Sie können auch zu zweit abgeben.

Hausaufgaben

Aufgabe E2.1

Seien X_1, X_2 unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von X_1/X_2.

Lösung. Nenne der Übersicht halber $X_1 = Y$ und $X_2 = X$. Sei $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ die gemeinsame Verteilung. Für $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P(Y/X \leq c) &= P((Y \leq cX) \wedge (X > 0)) + P((Y \geq cX) \wedge (X < 0)) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{cx} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \int_{cx}^\infty f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = y/x$ (man beachte, dass $x < 0$ im zweiten Integral) und Fubini folgt weiterhin

$$\begin{aligned} P(Y/X \leq c) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{c} x f_{X,Y}(x,xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \int_{c}^{-\infty} x f_{X,Y}(x,xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^c \int_0^\infty x f_{X,Y}(x,xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^c \int_{-\infty}^0 x f_{X,Y}(x,xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^c \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |x| e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^c \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}}\,\mathrm{d}x}_{=f_{Y/X}(z)}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Mit der Beobachtung, dass $\int_0^\infty t e^{-at^2}\,\mathrm{d}t = [-\frac{1}{2a}e^{-ay^2}]_0^\infty = \frac{1}{2a}$, gilt

$$f_{Y/X}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-x^2\frac{1+z^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2},$$

also ist $f_{Y/X}$ Cauchy-verteilt.

Aufgabe E2.2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \geq 1$. Definiere für eine messbare Funtion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Zeigen Sie die Minkowski-Ungleichung, also $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ für messbare f, g.

Lösung. Sei q so, dass $q^{-1}+p^{-1}=1$. Insbesondere ist also $p=q(p-1)$ Mit der Hölder-Ungleichung ergibt sich

$$\int |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_p\left(\int |f+g|^{q(p-1)}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p\cdot\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Analog gilt

$$\int |g|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_p\left(\int |f+g|^{q(p-1)}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \|g\|_p\cdot\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\|f+g\|_p^p \le \int(|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le (\|f\|_p+\|g\|_p)\cdot\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Aufgabe E2.3

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt. Zeigen Sie: falls $S_n/n \xrightarrow{\text{f.s.}} a$ mit $a\in\mathbb{R}$, dann $\mathbb{E}[X_1]=a$.

Lösung. Es ist

$$\frac{X_n}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1}\xrightarrow{\text{f.s.}}0 \quad\Longrightarrow\quad P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right|\ge 1 \text{ für } \infty \text{ viele } n\right)=0.$$

Nach dem Borel-Cantelli-Lemma muss also $\sum_{n\ge1}P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right|\ge1\right)<\infty$ und damit

$$\sum_{n\ge1}P(|X_1|\ge n)<\infty \;\Rightarrow\; \mathbb{E}[|X_1|]<\infty.$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt also $S_n/n\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}[X_1]$ und daher $\mathbb{E}[X_1]=a$.

Aufgabe E2.4

Geben Sie Beispiele für Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X, sodass $X_n\xrightarrow{\text{d}}X$ und

(i) X_n für alle $n\in\mathbb{N}$ integrierbar, aber X nicht integrierbar ist oder

(ii) X_n für alle $n\in\mathbb{N}$ nicht integrierbar ist, X jedoch schon oder

(iii) X_n für alle $n\in\mathbb{N}$ und X integrierbar sind mit $\mathbb{E}[X_n]\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}[X]$, jedoch $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichgradig integrierbar ist.

Lösung

(i) Wir wählen diskrete X und X_n mit den folgenden Verteilungen:

$$P(X=k)=\frac{6}{\pi^2\cdot k^2},\ k\in\mathbb{N},\qquad P(X_n=k)=\frac{k^{-2}}{\sum_{i=1}^n i^{-2}},\ k\in\{1,\dots,n\}.$$

Nach Z9.3 gilt $X_n\xrightarrow{\text{d}}X$, und $\mathbb{E}[X]=6\pi^{-2}\sum_{k\ge1}k^{-1}=\infty$. Des Weiteren ist $1\le X_n\le n$, also auch $\mathbb{E}[|X_n|]<\infty$.

(ii) Seien U, V, W, unabhängig identisch verteilt mit $U \sim \mathcal{U}_{(0,1)}$. Wir wählen

$$X = U, \qquad X_n := U \cdot \mathbb{1}_{\{W \leq \frac{n-1}{n}\}} + V^{-1} \cdot \mathbb{1}_{\{W > \frac{n-1}{n}\}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $E[X] = \frac{1}{2}$ und es gilt $\mathbb{E}[X_n] \geq \frac{1}{n}\mathbb{E}[V^{-1}] \geq \frac{1}{n}\int_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x = \infty$. Für $\varepsilon > 0$ ist außerdem

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P(W > (n-1)/n) = \frac{1}{n} \to 0,$$

also $X_n \xrightarrow{P} X$.

(iii) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{U}_{[0,1]})$. Wähle

$$X = 0, \qquad X_n = n\left(\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}\right), \; n \in \mathbb{N}.$$

Offenbar ist $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und darüber hinaus sogar $X_n \xrightarrow{P} X$. Jedoch sind die X_n nicht gleichgradig integrierbar, denn zu $N > 0$ gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq N\}}] = 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq N\}}] = 2 \overset{N\to\infty}{\not\to} 0.$$

Aufgabe E2.5

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige exponetialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1. Sei $Y_n = \max_{k\leq n} X_k$. Bestimmen Sie eine Sequenz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $Y_n - a_n$ in Verteilung konvergiert.

Lösung. Setze $a_n = \log n$. Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} P(Y_n - a_n \leq c) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq c + a_n)\right) = (1 - e^{-c-a_n})^n \cdot \mathbb{1}_{\{c+a_n \geq 0\}} \\ &= \left(1 - \frac{e^{-c}}{n}\right)^n \cdot \mathbb{1}_{\{c+a_n\geq 0\}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-e^{-c}} =: F(c), \end{aligned}$$

was die punktweise Konvergenz zeigt. Man prüft leicht, dass F tatsächlich eine (stetige) Verteilungsfunktion ist.

Aufgabe E2.6

Seien $X, X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) Das Paar (X, X) ist genau dann unabhängig, wenn X fast sicher konstant ist.

(b) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann fast sicher konstant, wenn $\sum_{i=1}^n X_i$ fast sicher konstant ist.

Lösung.

(a) $\Rightarrow$ Nehme an, X sei nicht f.s. konstant. Dann existiert $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $0 < \alpha := F_X(x_0) < 1$. Doch dann ist

$$\alpha = P(X \leq x_0) = P(\{X \leq x_0\} \cap \{X \leq x_0\}) = P(X \leq x_0)^2 = \alpha^2,$$

also $\alpha \in \{0, 1\}$, ein Widerspruch.

$\Leftarrow$ Sei $X = c$ f.s. und $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es gilt

$$P(X \in A, X \in B) = P(X \in A \cap B) = \mathbb{1}_{\{c \in A \cap B\}} = P(X \in A)P(X \in B).$$

(b) $\Rightarrow$ Sei $X_k = c_k$ f.s. für alle $1 \leq k \leq n$ und setze $c = \sum_{k=1}^n c_k$. Es ist

$$P(\sum_{k=1}^n X_k = c) \geq P(\cap_k X_k = c_k) = \prod_{k=1}^n P(X_k = c_k) = 1.$$

$\Leftarrow$ Wir zeigen die Aussage per Induktion, wobei der Anfang für $n = 1$ klar ist. Sei also $n > 1$ und definiere $Y_n = \sum_{k=1}^{n-1} X_k$. Dann ist $Y_n + X_n = c$ f.s. für ein $c \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $Y_n = c - X_n$. Nehme nun o.B.d.A. an, X_n sei nicht f.s. konstant. Analog wie in (a) existiert dann $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $F_{X_n}(x_0) = \alpha \in (0, 1)$. Da folglich auch $P(c - Y_n \leq x_0) = \alpha$, erhalten wir via

$$\alpha = P(X_n \leq x_0 \wedge Y_n \geq c - x_0) = P(X_n \leq x_0)P(Y_n \geq c - x_0) = \alpha^2$$

einen Widerspruch. Es sind also Y_n und X_n f.s. konstant. Das Resultat folgt, wenn wir die Induktionsannahme auf Y_n anwenden.

Aufgabe E2.7

Bestimmen Sie für jedes Paar an Maßen μ und ν, welches bezüglich des anderen absolut stetig ist und warum. Falls eine Radon-Nikodym-Ableitung existiert, geben Sie diese explizit an; falls nicht, finden Sie ein Ereignis A, das Maß Null bzgl. des einen Maßes, aber nicht bzgl. des anderen Maßes hat.

(i) $\mu \sim \text{Exp}(1), \nu \sim \text{Exp}(2)$,
(ii) $\mu \sim \mathcal{N}(0, 1), \nu \sim \text{Exp}(1)$,
(iii) $\mu \sim \mathcal{N}(0, 1), \nu \sim \text{Bin}(100, 1/2)$.

Lösung.

(i) Die Maße μ und ν sind äquivalent: Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mu(A) = \int_A \mathrm{d}\mu(x) = \int_A e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_A e^x \cdot 2e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_A e^x\,\mathrm{d}\nu(x).$$

Also $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}(x) = \frac{1}{2}e^x$. Analog ist $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = 2e^{-x}$.

(ii) Es ist $\nu \ll \mu$ aber $\mu \not\ll \nu$. Um den ersten Teil einzusehen, wählen wir wieder $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int_A e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_A e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_A e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\sqrt{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

also $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x+\frac{x^2}{2}} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Sei andererseits $a < b < 0$, dann ist $\nu([a, b]) = 0 < \mu([a, b])$.

(iii) Die Maße μ und ν sind bzgl. des jeweils anderen singulär – ν ist diskret und μ stetig. Als Beispiel, wähle $A = [a, b]$ mit $a < b < 0$ und $B = \{n\}$ mit $n \in \{0, \ldots, 100\}$. Dann ist $\nu(B) > \nu(A) = 0 = \mu(B) < \mu(A)$.

Aufgabe E2.8

Seien X_1, X_2 unabhängige und identisch verteilte positive Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = \infty$. Sei $Y = \min\{X_1, X_2\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^2] &\overset{\text{Ü4.8}}{=} \int_0^\infty P(Y^2 > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty P(Y > \sqrt{t})\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty P(X_1 > \sqrt{t})^2\,\mathrm{d}t \\
&\le 1 + \int_1^\infty P(X_1 > \sqrt{t})^2\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Markov}}{\le} 1 + \int_1^\infty P\left(X_1 > \sqrt{t}\right) \cdot \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{s=\sqrt{t}}{\le} 1 + \mathbb{E}[X_1] \cdot \int_1^\infty P(X_1 > s)\,\mathrm{d}s \\
&\le 1 + \mathbb{E}[X_1]^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Lösung 2. Es ist $\mathbb{E}[Y^2] \le \mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] < \infty$.

Aufgabe E2.9

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P(X_1 = i) = \frac{1}{10}$ für $0 \le i \le 9$. Bestimmen Sie die Verteilung von $Y = \sum_{n\ge1} \frac{X_n}{10^n}$.

Lösung. Wir behaupten, dass $0 \le Y \le 1$ uniform auf $[0,1]$ verteilt ist. Sei hierfür $c \in [0,1]$ in Dezimaldarstellung $c = \sum_{i\ge1} c_i \cdot 10^{-i}$ gegeben. Es ist

$$\{Y \le c\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\{X_n < c_n\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k = c_k\} \right)$$

eine Partition des Ereignisses $Y \le c$, also

$$P(Y \le c) = \sum_{n\ge1} \frac{c_n}{10} \cdot \frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{n\ge1} \frac{c_n}{10^n} = c.$$

Aufgabe E2.10

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt. Zeigen Sie:

(a) $\forall \varepsilon > 0:$

$$\begin{aligned}
P(|X_n| \ge \varepsilon n \text{ unendlich oft }) = 0 &\iff \mathbb{E}[|X_1|] < \infty \\
P(|X_n| \ge \varepsilon n \text{ unendlich oft }) = 1 &\iff \mathbb{E}[|X_1|] = \infty.
\end{aligned}$$

(b)

$$P\left(\frac{1}{n} \cdot \max_{1\le k\le n} |X_k| \to 0\right) = 1 \iff \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$$

Lösung.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
E[|X_1|] < \infty &\iff \forall \varepsilon > 0 : \mathbb{E}[|\tfrac{X_1}{\varepsilon}|] < \infty \overset{\text{Ü4.8}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \sum_{n\ge0} P(|\tfrac{X_1}{\varepsilon}| \ge n) < \infty \\
&\iff \forall \varepsilon > 0 : \sum_{n\ge0} P(|X_n| \ge \varepsilon n) < \infty \\
&\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : P(|X_n| \ge \varepsilon n \text{ unendlich oft}) = 0
\end{aligned}$$

Die zweite Äquivalenz wird analog gezeigt.

(b) Setze $M_n = \max_{1\leq k\leq n} |X_k|$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} M_n/n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 &\iff P\left(\bigcap_{l\in\mathbb{N}}\{\liminf_{n\to\infty} M_n/n < 1/l\}\right) = 1 \\ &\iff \lim_{l\to\infty} P\left(\liminf_{n\to\infty} M_n/n < 1/l\right) = 1 \\ &\iff \forall\varepsilon > 0 : P\left(\liminf_{n\to\infty} M_n/n < \varepsilon\right) = 1 \\ &\iff \forall\varepsilon > 0 : P\left(M_n \geq \varepsilon n \text{ unendlich oft}\right) = 0. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun noch, dass

$$\{M_n \geq \varepsilon n \text{ unendlich oft}\} = \{|X_n| \geq \varepsilon n \text{ unendlich oft}\},$$

um den Beweis unter Anwendung von (a) abzuschließen. Zu zeigen ist nur die Inklusion '$\subseteq$'. Betrachte hierfür ein ω, das nicht in der rechten Menge liegt und wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|X_n(\omega)| < \varepsilon n$ für alle $n \geq N$. Setze

$$C := \varepsilon^{-1} \cdot \max_{1\leq k\leq N} |X_k(\omega)|, \quad M := \max(N, C+1).$$

Nach Wahl ist für $n \geq M$ nun $\max_{1\leq k\leq N} |X_k(\omega)| = C\varepsilon < \varepsilon n$ und nach Wahl von N ist $|X_k(\omega)| < \varepsilon n$ für alle $N \leq k \leq n$. Also liegt ω auch nicht in der linken Menge.

Aufgabe E2.11

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige u.i.v. Zufallsvariablen mit $0 < \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Weiter sei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \ n \in \mathbb{N},$$

die zugehörige in 0 gestartete sogenannte Irrfahrt. Man beweise, dass

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ oder } \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right) = 1.$$

(*Hinweis:* Beweis von Satz 3.15.)

Lösung. Bemerke, dass die Bedingung $0 < \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ die Existenz eines $\delta > 0$ impliziert, für welches $P(X_1 > \delta) > 0$ oder $P(X_1 < -\delta) > 0$ gilt. O.B.d.A. können wir Ersteres annehmen (andernfalls betrachten wir $-S_n$). Es sei $M > 0$ beliebig. Definiere die Zufallsvariable $T = T(M) := \inf\{n \geq 1 : S_n \notin [-M, M]\}$. Zu zeigen ist also die äquivalente Behauptung $T < \infty$ f.s.
Wähle $l \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $l\delta > 2M$. Wegen der Unabhängigkeit der Folge $(X_n)_n$ sind auch die Ereignisse

$$A_i := \{X_{(i-1)l+1} > \delta, ..., X_{il} > \delta\}, \quad i \in \mathbb{N},$$

unabhängig. Beachte, dass $P(A_i) = P(X_1 > \delta)^l > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und wegen der i-Unabhängigkeit dieser Wahrscheinlichkeiten ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gibt es f.s. unendlich viele i, für welche A_i eintritt (was insbesondere heißt, dass f.s. mindestens ein A_i eintritt). Für beliebiges i ist jedoch $T < \infty$ auf A_i: Ist $S_{(i-1)l} \in [-M, M]$, so folgt aus $l\delta > 2M$, dass $S_{il} > -M + 2M = M$, also $T \leq il$. Ist $S_{(i-1)l} \notin [-M, M]$, so ist ohnehin schon $T < (i-1)l$.
Da $M > 0$ beliebig gewählt war, haben wir die Behauptung hiermit gezeigt.

Aufgabe E2.12

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ und $F_Z^{-1}(y) := \inf\{x : F_Z(x) \geq y\}$ die aus ihren Verteilungsfunktionen gebildeten Quantilsfunktionen. Y sei gleichverteilt auf $[0,1]$. Rufen Sie sich in Erinnerung, dass $F_Z^{-1}(Y)$ wie Z verteilt ist, und zeigen Sie, dass $F_{X_n}^{-1}(Y) \xrightarrow{\text{f.s.}} F_X^{-1}(Y)$.

Lösung. Da F_Z^{-1} monoton steigt, ist die Menge der Sprungstellen abzählbar, also eine Nullmenge. Es genügt zu zeigen, dass $F_{X_n}^{-1}(y) \xrightarrow{n\to\infty} F_X^{-1}(y)$ für F_X^{-1} stetig an y.
Nehme an, es existiert $\varepsilon > 0$, sodass (o.B.d.A.) $F_{X_n}^{-1}(y) \geq F_X^{-1}(y) + \varepsilon$ für unendlich viele n. Nach der Stetigkeit an y existiert $\delta > 0$, sodass $F_X^{-1}(y+\delta) \leq F_X^{-1}(y) + \frac{\varepsilon}{2} =: x_\varepsilon$. Es folgt, dass

$$\inf\{x : F_X(x) \geq y + \delta\} \leq \inf\{x : F_X(x) \geq y\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun gilt
- $F_X(F_X^{-1}(y)) \geq y \quad \Rightarrow \quad F_X(F_X^{-1}(y) + \frac{\varepsilon}{2}) \geq F_X(F_X^{-1}(y+\delta)) \geq y + \delta$ und
- $F_{X_n}(F_X^{-1}(y) + \frac{\varepsilon}{2}) \leq F_{X_n}(F_{X_n}^{-1}(y) - \frac{\varepsilon}{2}) = F_{X_n}(\inf\{x : F_{X_n}(x) \geq y\} - \frac{\varepsilon}{2}) < y$ unendlich oft.

Diese beiden Ungleichungen führen zu

$$F_X(x_\varepsilon) - F_{X_n}(x_\varepsilon) \geq \delta \text{ für unendlich viele } n,$$

und damit $F_{X_n}(x_\varepsilon) \not\to F_X(x_\varepsilon)$. Falls x_ε eine Stetigkeitsstelle von F_X war, erhalten wir damit einen Widerspruch. Falls nicht, ersetze x_ε durch $x_\varepsilon + \alpha$ mit $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, sodass F_X an $x_\varepsilon + \alpha$ stetig ist (überabzählbar viele Wahlmöglichkeiten), um so den Widerspruch zu erhalten.
Ein Korollar dieser Aufgabe ist, dass es für $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ einen W-Raum und dort definierte Zufallsvariablen Y_n und Y mit $P_{X_n} = P_{Y_n}$ und $P_X = P_Y$ gibt, sodass $Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$.