Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Extrablatt 2

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Abgabe bis spätestens am 10. Juli. Sie können auch zu zweit abgeben.

Hausaufgaben

Aufgabe E2.1

Seien X_1, X_2 unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von X_1/X_2.

Aufgabe E2.2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \geq 1$. Definiere für eine messbare Funtion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Zeigen Sie die Minkowski-Ungleichung, also $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ für messbare f, g.

Aufgabe E2.3

Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt. Zeigen Sie: falls $S_n/n \xrightarrow{\text{f.s.}} a$ mit $a \in \mathbb{R}$, dann $\mathbb{E}[X_1] = a$.

Aufgabe E2.4

Geben Sie Beispiele für Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X, sodass $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ und

(i) X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ integrierbar, aber X nicht integrierbar ist oder

(ii) X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht integrierbar ist, X jedoch schon oder

(iii) X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ und X integrierbar sind mit $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E}[X]$, jedoch $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe E2.5

Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige exponetialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1. Sei $Y_n = \max_{k \leq n} X_k$. Bestimmen Sie eine Sequenz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so dass $Y_n - a_n$ in Verteilung konvergiert.

Aufgabe E2.6

Seien $X, X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) Das Paar (X, X) ist genau dann unabhängig, wenn X fast sicher konstant ist.

(b) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind genau dann fast sicher konstant, wenn $\sum_{i=1}^n X_i$ fast sicher konstant ist.

Aufgabe E2.7

Bestimmen Sie für jedes Paar an Maßen μ und ν, welches bezüglich des anderen absolut stetig ist und warum. Falls eine Radon-Nikodym-Ableitung existiert, geben Sie diese explizit an; falls nicht, finden Sie ein Ereignis A, das Maß Null bzgl. des einen Maßes, aber nicht bzgl. des anderen Maßes hat.

(i) $\mu \sim \text{Exp}(1), \nu \sim \text{Exp}(2)$,

(ii) $\mu \sim \mathcal{N}(0,1), \nu \sim \text{Exp}(1)$,

(iii) $\mu \sim \mathcal{N}(0,1), \nu \sim \text{Bin}(100, 1/2)$.

Aufgabe E2.8

Seien X_1, X_2 unabhängige und identisch verteilte positive Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = \infty$. Sei $Y = \min\{X_1, X_2\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

Aufgabe E2.9

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P(X_1 = i) = \frac{1}{10}$ für $0 \le i \le 9$. Bestimmen Sie die Verteilung von $Y = \sum_{n\ge1} \frac{X_n}{10^n}$.

Aufgabe E2.10

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt. Zeigen Sie:

(a) $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(|X_n| \ge \varepsilon n \text{ unendlich oft }) = 0 \iff \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$
$$P(|X_n| \ge \varepsilon n \text{ unendlich oft }) = 1 \iff \mathbb{E}[|X_1|] = \infty.$$

(b)

$$P\left(\frac{1}{n} \cdot \max_{1\le k\le n} |X_k| \to 0\right) = 1 \iff \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$$

Aufgabe E2.11

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige u.i.v. Zufallsvariablen mit $0 < \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Weiter sei

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k,\ n \in \mathbb{N},$$

die zugehörige in 0 gestartete sogenannte Irrfahrt. Man beweise, dass

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ oder } \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\right) = 1.$$

(*Hinweis:* Beweis von Satz 3.15.)

Aufgabe E2.12

Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ und $F_Z^{-1}(y) := \inf\{x : F_Z(x) \geq y\}$ die aus ihren Verteilungsfunktionen gebildeten Quantilsfunktionen. Y sei gleichverteilt auf $[0,1]$. Rufen Sie sich in Erinnerung, dass $F_Z^{-1}(Y)$ wie Z verteilt ist, und zeigen Sie, dass $F_{X_n}^{-1}(Y) \xrightarrow{\text{f.s.}} F_X^{-1}(Y)$.