Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Extrablatt: Lösungen 1

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Abgabe bis spätestens am 08.06.17. Sie können auch zu zweit abgeben.

Hausaufgaben

Aufgabe E1.1

Seien X und Y reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass auch das Produkt XY wieder eine Zufallsvariable ist.

Lösung. Wir zeigen, dass die Ereignisse $\{XY < a\}$ für $a \in \mathbb{Q}$ messbar sind. Es gilt

$$\begin{aligned}\{XY < a\} &= \{X\mathbb{1}_{\{a>0\}} = \mathbb{1}_{\{a\leq 0\}}\} \cup \bigcup_{r\in\mathbb{R}} \Big(\{0 < X < r\} \cap \{Y < a/r\}\Big) \cup \Big(\{r < X < 0\} \cap \{Y > a/r\}\Big) \\ &= \{X\mathbb{1}_{\{a>0\}} = \mathbb{1}_{\{a\leq 0\}}\} \cup \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \Big(\{0 < X < r\} \cap \{Y < a/r\}\Big) \cup \Big(\{r < X < 0\} \cap \{Y > a/r\}\Big)\end{aligned}$$

und $\{XY < a\}$ ist als abzählbare Vereinigung messbarer Ereignisse messbar.

Aufgabe E1.2

Es seien $P \approx Q$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben und X eine Zufallsvariable. Beweisen oder widerlegen Sie: Aus $X \in \mathcal{L}^1(P)$ folgt $X \in \mathcal{L}^1(Q)$.

Lösung Sei $\Omega = [1, \infty)$ mit der zugehörigen Borel-σ-Algebra. Wir wählen P und Q mit den RN-Dichten $f_P(x) = \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) \cdot 2x^{-3}$ und $f_Q(x) = \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) \cdot x^{-2}$. Dann ist die Identität $X(x) = x$ bzgl. P integrierbar, aber nicht bzgl. Q.

Aufgabe E1.3

Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ν σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\mu := \sum_{n\geq 1} a_n\mu_n$ ein signiertes Maß ist. Es gelte weiterhin $\mu_n \perp \nu$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu \perp \nu$.

Lösung. Es sei N_n für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\nu(N_n) = 0$ und $\mu_n(N_n^c) = 0$. Definieren wir nun $N = \cup_n N_n$, so ist $\nu(N) = 0$ und $\mu(N^c) = 0$, also $\mu \perp \nu$.

Aufgabe E1.4

Seien $X_1, \dots, X_n \in \{0, 1\}$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum so dass

$$P((X_1, \dots, X_n) = \omega) = 2^{-n} \quad \text{für alle } \omega \in \{0, 1\}^n.$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass so ein Wahrscheinlichkeitsraum existiert.

(b) Sei $X = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.

(c) Zeigen Sie $1 + x \leq e^x$ für $x \geq 0$.

(d) Zeigen Sie für $t \geq 0$

$$P(X \geq \mathbb{E}[X](1+t)) \leq \left(\frac{e^t}{(1+t)^{(1+t)}}\right)^{\mathbb{E}[X]}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die exponentielle Chebyshev-Ungleichung und nutzen Sie (c) an geeigneter Stelle.

Lösung.

(a) Folgt mit Satz 1.37, da Ω somit als n-faches Produkt des fairen Münzwurfs konstruiert werden kann. Nach diesem Satz folgt weiterhin, dass $P(X_j = i) = \frac{1}{2}$ für alle $j \in [n], i \in \{0, 1\}$.

(b) Es ist $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{2}$. Es ist $\mathbb{E}[X_1^2] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{E}[X_1 X_2] = \frac{1}{4}$. Nach Ü4.7(f) folgt daher $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = \frac{n}{4}$.

(c) Es ist $\int_0^x 1 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^x e^t \,\mathrm{d}t$ und daher $x - 0 \leq e^x - e^0$, also $x \leq e^x - 1$.

(d) Wir setzen $\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}$. Es sei bemerkt, dass für $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \sum_{k=0}^n P(X = k) e^{\lambda k} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{\lambda k} 1^{n-k} = 2^{-n}(1 + e^\lambda)^n.$$

Wir nutzen nun die exponentielle Chebyshev-Ungleichung mit einem $\lambda > 0$, um eine obere Schranke zu erhalten, die später nach λ minimiert wird.

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \mu(1+t)\right) &\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda\mu(1+t)}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(e^\lambda - 1)\right)^n}{e^{\lambda\mu(1+t)}} \leq \frac{e^{\frac{1}{2}(e^\lambda - 1)n}}{e^{\lambda\mu(1+t)}} \\ &= \left(e^{e^\lambda - 1 - \lambda(1+t)}\right)^\mu \end{aligned}$$

Um obigen Ausdruck zu minimieren, könnten wir äquivalenterweise $f(\lambda) = e^\lambda - 1 - \lambda(1+t)$ minimieren. Wegen $f'(\lambda) = e^\lambda - (1+t) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \log(1+t)$ und $f''(\lambda) = e^\lambda > 0$ wählen wir $\lambda = \log(1+t)$. Eingesetzt erhalten wir genau die zu zeigende Schranke.

Aufgabe E1.5

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und X eine reelle Zufallsvariable. Berechnen sie die ersten zwei Momente von X sowie $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$ in folgenden Fällen:

(a) X ist Bernoulli-p-verteilt, d.h. $P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p$.

(b) X ist Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda \geq 0$, also

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(c) X ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$, d.h. X besitzt die Lebesgue-Dichte $\lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$.

Lösung.

(a) Es ist $\mathbb{E}[X] = p, \mathbb{E}[X^2] = p$ und daher $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = p - p^2 = p(1-p)$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= e^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda, \\
\mathbb{E}[X^2] &= e^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\lambda e^{\lambda}\right) = \lambda + \lambda^2, \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] &= \lambda,
\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -te^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}, \\
\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -t^2 e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^2}, \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] &= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe E1.6

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und X eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} P(X > t)\,\mathrm{d}t, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Lösung. Mit Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^p] &= \int_\Omega X^p\,\mathrm{d}P = \int_\Omega \left(\int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{1}_{\{X>t\}}\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}P = p \int_0^\infty t^{p-1} \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X>t\}}\,\mathrm{d}P\right) \mathrm{d}t \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} P(X > t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Aufgabe E1.7

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \sigma^2 < \infty$, sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $P(X + t \geq a + t)$.

Lösung. Sei $t > -a$. Dann gilt mit Satz 2.9 mit $h(x) = (x+t)^2$, dass

$$P(X + t \geq a + t) \leq \frac{\mathbb{E}[(X+t)^2]}{(a+t)^2} = \frac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2} =: f(t).$$

Minimieren wir die recht Seite nun nach t, so erhalten wir $(a+t)^4 f'(t) = 2t(a+t)^2 - 2(\sigma^2 + t^2)(a+t)$, also $f'(t) = 0$ für $t = \sigma^2/a > 0$. Einsetzen ergibt

$$f(\sigma^2/a) = \frac{\sigma^2(1 + \frac{\sigma^2}{a^2})}{(a + \frac{\sigma^2}{a})^2} = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.$$

Aufgabe E1.8

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen in einem Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\liminf_{n\to\infty} A_n = \overline{\limsup_{n\to\infty} \overline{A_n}}$.

(b) Formulieren Sie das Borel-Cantelli Lemma für $\liminf_{n\to\infty} A_n$.

Lösung

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\{\limsup_{n\to\infty} A_n^c\}^c &= \{A_n^c \text{ für unendlich viele n}\}^c \\
&= \{A_n^c \text{ für höchstens endlich viele n}\} \\
&= \{A_n \text{ für alle außer endlich viele n}\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} A_n.
\end{aligned}$$

(b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Ereignissen. Dann gilt

(i) $\sum_{n\geq 1} P(A_n^c) < \infty \quad \Longrightarrow \quad P(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 1.$

(ii) $\sum_{n\geq 1} P(A_n^c) = \infty$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig $\quad \Longrightarrow \quad P(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 0.$

Aufgabe E1.9

(a) Sei X eine Zufallsvariable. Wir nehmen an, dass für die Lebesgue-Zerlegung der Verteilung $P_X = P_a + P_s$ bzgl. des Lebesgue-Maßes λ gilt, dass der singuläre Anteil $P_s = \sum_{x\in N} \alpha_x \delta_x$ erfüllt, wobei $\alpha_x > 0$ und $\delta_x(A) = \mathbb{1}_{x\in A}$.

(i) Bestimmen Sie N und die α_x, und argumentieren Sie, dass N abzählbar ist.

(ii) Bestimmen Sie P_a.

Hinweis: Betrachten Sie die Verteilungsfunktion und deren Unstetigkeitsstellen.

(b) Seien P, Q zwei W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $Q = Q_a + Q_s$ die Lebesgue-Zerlegung von Q bzgl. P, es existiere also eine Dichte f mit $Q_a(A) = \int_A f \, \mathrm{d}P$. Es gelte weiterhin $f = \infty$ Q_s-f.s. Definiere die Menge $A_c := \{\omega : f(\omega) > c\}$ für $c > 0$. Zeigen Sie:

$$P(B) \leq P(A_c) \quad \Rightarrow \quad Q(B) \leq Q(A_c) \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Hinweis: Schätzen Sie $Q(A_c) - Q(B)$ geeignet nach unten ab.

Lösung.

(a) Anschaulich:

- Sprünge in der Verteilungsfunktion entsprechen dem singulären Anteil, d.h. einer Summe von gewichteten Diracmaßen,
- die glatten Anteile der Verteilungsfunktion (nachdem man die Sprünge entfernt hat), ensprechen dem absolutstetigen Anteil.

Genauer: Sei F die besagte Verteilungsfunktion. Definiere für $x \in \mathbb{R}$

$$F_+(x) = \lim_{y \downarrow x} F(y), \quad F_-(x) = \lim_{y \uparrow x} F(y).$$

Damit ist $N := \{x \in \mathbb{R} \mid F_-(x) < F_+(x)\}$. Es gilt $N = \cup_n J_n$, wobei

$$J_n = \{x \in \mathbb{R} : F_+(x) - F_-(x) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Offensichtlich ist $|J_n| \leq n$ und damit N als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar. Betrachte nun

$$P_s := \sum_{x \in N} (F_+(x) - F_-(x)) \cdot \underbrace{\delta_x}_{\text{Dirac-Punktmaß}} .$$

Klar ist, dass P_s singulär zum Lebesguemaß ist. Nun entfernen wir die Sprünge aus der Verteilungsfunktion, betrachten also

$$\bar{F}(x) := F(x) - \sum_{z \in N : z \leq x} (F_+(z) - F_-(z)).$$

Diese Funktion ist stetig und monoton wachsend. Gemäß grundlegenden Resultaten der Maßtheorie gibt es genau ein Maß P_a auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, welches für alle $a < b$

$$P_a((a, b)) = \bar{F}(b) - \bar{F}(a)$$

erfüllt. Dieses Maß ist absolut stetig zum Lebesguemaß.
(*Bemerkung*: Die Voraussetzung der Aufgabe verhindert, dass sich hinter $\bar{F}$ die Kombination eines zum Lebesguemaß absolutstetigen und eines zum Lebesguemaß singulären Maßes mit stetiger Verteilungsfunktion versteckt. Allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lassen sich zerlegen in eine Kombination von Diracmaßen, einen zum Lebesguemaß singulären Anteil mit stetiger Verteilungsfunktion und einen zum Lebesguemaß absolutstetigen Anteil.)

(b) Wähle $N \in \mathcal{A}$, welches $Q_s(N^c) = P(N) = 0$ erfüllt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $f|_N \equiv \infty$ gilt, d.h. $N \subseteq A_c$ für alle $c > 0$. Betrachten wir die Differenz

$$Q(A_c) - Q(B) = \int (\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B)(\,\mathrm{d}Q_a + \mathrm{d}Q_s) = \int_N (\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B)\,\mathrm{d}Q_s + \int_{N^c} (\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B) f \,\mathrm{d}P.$$

Auf N ist $\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B = 1 - \mathbb{1}_B \geq 0$. Wir erhalten

$$Q(A_c) - Q(B) \geq \int_{N^c} (\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B) f \,\mathrm{d}P.$$

Nun müssen die verschiedenen möglichen Werte der Indikatorfunktionen vergleichen.

- Ist $\mathbb{1}_{A_c} = \mathbb{1}_B$, so ist $f(\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B) \geq c(\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B)$.
- Ist $\mathbb{1}_{A_c} = 0$ und $\mathbb{1}_B = 1$, so ist nach Definition $f(\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B) = -f \geq -c = c(\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B)$.
- Ist $\mathbb{1}_{A_c} = 1$ und $\mathbb{1}_B = 0$, so ist nach Definition $f(\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B) = f \geq c = c(\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B)$.

Folglich gilt

$$Q(A_c) - Q(B) \geq \int_{N^c} (\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B) f \,\mathrm{d}P \geq c \int_{N^c} (\mathbb{1}_{A_c} - \mathbb{1}_B) \,\mathrm{d}P = c(P(A_c) - P(B)),$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass P auf dem Ereignis N^c volle Masse hat. Wenn $P(A_c) \geq P(B)$, so folgt aus dieser Ungleichung $Q(A_c) \geq Q(B)$.