Sommersemester 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Extrablatt 1

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Abgabe bis spätestens am 08.06.17. Sie können auch zu zweit abgeben.

Hausaufgaben

Aufgabe E1.1

Seien X und Y reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass auch das Produkt XY wieder eine Zufallsvariable ist.

Aufgabe E1.2

Es seien $P \approx Q$ zwei Wahrscheinlchkeitsmaße auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben und X eine Zufallsvariable. Beweisen oder widerlegen Sie: Aus $X \in \mathcal{L}^1(P)$ folgt $X \in \mathcal{L}^1(Q)$.

Aufgabe E1.3

Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ν σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\mu := \sum_{n\geq 1} a_n \mu_n$ ein signiertes Maß ist. Es gelte weiterhin $\mu_n \perp \nu$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu \perp \nu$.

Aufgabe E1.4

Seien $X_1, \ldots, X_n \in \{0, 1\}$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum so dass

$$P((X_1, \ldots, X_n) = \omega) = 2^{-n} \quad \text{für alle } \omega \in \{0,1\}^n.$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass so ein Wahrscheinlichkeitsraum existiert.

(b) Sei $X = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.

(c) Zeigen Sie $1 + x \leq e^x$ für $x \geq 0$.

(d) Zeigen Sie für $t \geq 0$

$$P\big(X \geq \mathbb{E}[X](1+t)\big) \leq \left(\frac{e^t}{(1+t)^{(1+t)}}\right)^{\mathbb{E}[X]}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die exponentielle Chebyshev-Ungleichung und nutzen Sie (c) an geeigneter Stelle.

Aufgabe E1.5

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und X eine reelle Zufallsvariable. Berechnen sie die ersten zwei Momente von X sowie $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$ in folgenden Fällen:

(a) X ist Bernoulli-p-verteilt, d.h. $P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p$.

(b) X ist Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda \geq 0$, also

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(c) X ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$, d.h. X besitzt die Lebesgue-Dichte $\lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$.

Aufgabe E1.6

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und X eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} P(X > t) \, \mathrm{d}t, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe E1.7

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \sigma^2 < \infty$, sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $P(X + t \geq a + t)$.

Aufgabe E1.8

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen in einem Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\liminf_{n \to \infty} A_n = \overline{\limsup_{n \to \infty} \overline{A_n}}$.

(b) Formulieren Sie das Borel-Cantelli Lemma für $\liminf_{n \to \infty} A_n$.

Aufgabe E1.9

(a) Sei X eine Zufallsvariable. Wir nehmen an, dass für die Lebesgue-Zerlegung der Verteilung $P_X = P_a + P_s$ bzgl. des Lebesgue-Maßes λ gilt, dass der singuläre Anteil $P_s = \sum_{x \in N} \alpha_x \delta_x$ erfüllt, wobei $\alpha_x \geq 0$ und $\delta_x(A) = \mathbb{1}_{x \in A}$.

(i) Bestimmen Sie die N und die α_x, und argumentieren Sie dass N abzählbar ist.
(ii) Bestimmen Sie P_a.

Hinweis: Betrachten Sie die Verteilungsfunktion und deren Unstetigkeitsstellen.

(b) Seien P, Q zwei W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $Q = Q_a + Q_s$ die Lebesgue-Zerlegung von Q bzgl. P, es existiere also eine Dichte f mit $Q_a(A) = \int_A f \, \mathrm{d}P$. Es gelte weiterhin $f = \infty$ Q_s-f.s. Definiere die Menge $A_c := \{\omega : f(\omega) > c\}$ für $c > 0$. Zeigen Sie:

$$P(B) \leq P(A_c) \quad \Rightarrow \quad Q(B) \leq Q(A_c) \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Hinweis: Schätzen Sie $Q(A_c) - Q(B)$ geeignet nach unten ab.