15/05/17

Def 2.1 Sei X Zufallsvektor auf W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1) Das W-Maß $P_X = P \circ X^{-1}$ heißt die Verteilung von X auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

2) Die Abbildung $F_X(x) := P(X \leq x)$
$(= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$
$= P_X((-\infty, x]))$
für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Verteilungsfunktion von X.

Lem 2.2 Sei F Verteilungsfkt. von ZV. Dann

(1) F monoton steigend: $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

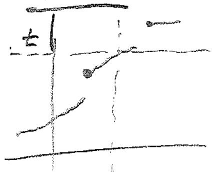
(2) F ist skaliert:
$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(3) rechtsstetig: Seien $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ mit $x_n \downarrow x$. Dann $F(x_n) \searrow F(x)$

Beweis: Übung!

Satz 2.3 Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit (1), (2), (3). Dann gibt es W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und Zufallsvariable X mit $F_X = F$.

Beweis Sei $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(0,1)$,



P = Lebesgue Maß auf Ω.
Für $t \in (0,1)$ setze
$F^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$.

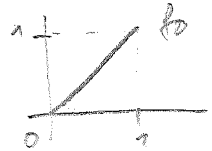
Dann gilt:
$F^{-1}(t) \leq x \Leftrightarrow t \leq F(x)$
Setze $X(\omega) = F^{-1}(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$. Dann X messbar und

$P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$
$= P(\{\omega : F^{-1}(\omega) \leq x\})$
$= P(\{\omega : \omega \leq F(x)\}) = F(x)$.

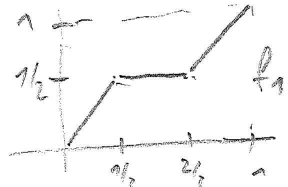
Def 2.4 ZVec X heißt
- diskret, falls $P_X \ll$ Zählmaß auf abzählbarer Menge
- stetig, falls $P_X \ll$ Lebesgue Maß

Beob. X stetig $\Rightarrow F_X$ stetig

Bsp. (Devil's staircase) Iterative Konstruktion:



$\xrightarrow[\text{Drittel}]{\text{Mittleres}}$



Wiederhole die Konstruktion in $[0, 1/3]$ und $[2/3, 1]$, usw... Setze

$f_0(x) = x$, $x \in [0,1]$.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2, & 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1/2, & 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 1/2 + 1/2 f_n(3x-2), & 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist die Cantor-Funktion definiert durch $F = \lim_{n \to \infty} f_n$.

Aus Konstruktion: F ist konstant auf

$[1/3, 2/3] \longrightarrow 1/3$

$[1/3^2, 2/3^2]$ $[2/3 + 1/3^2, 2/3 + 2/3^2] \to 2 \cdot 1/3^2$

$\left.\begin{array}{l}[1/3^3, 2/3^3], [2/3^2 + 1/3^3, 2/3^2 + 2/3^3] \\ [2/3 + 1/3^3, 2/3 + 2/3^3], [8/3^2 + 1/3^3, 8/3^2 + 2/3^3]\end{array}\right\} \to 2^2/3^3$

etc...

Diese haben Länge / Maß

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$. $\boxed{!}$

Sei X ZV mit Verteilungsfkt. F.

Dann: F ist stetig (Übung)

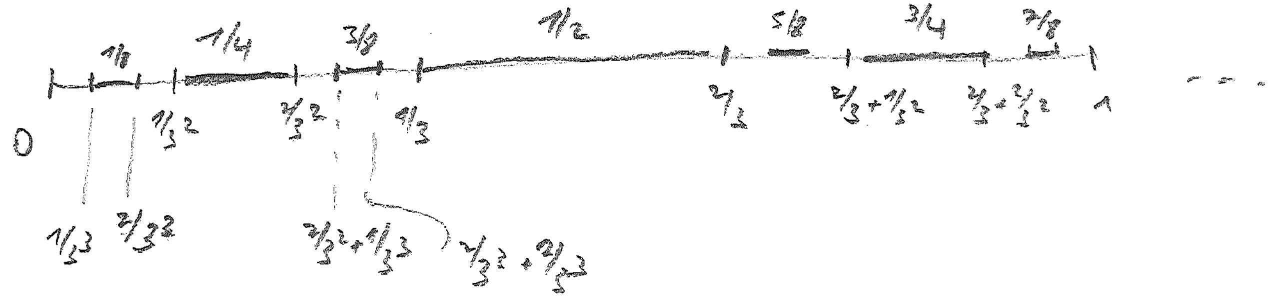
Betrachte Menge der "Cantor Punkte" also alle Zahlen in $[0,1]$, die Randpunkt eines Intervalls sind, auf dem F konstant ist.

$\longrightarrow C = \{1/3, 2/3, 1/3^2, 2/3^2, \ldots\}$

Dann Lebesgue-Maß$(C) = 0$

und $P(X \in [0,1] \setminus C)$
$= P(X$ in irgendeinem Intervall auf dem F konstant$) = 0$

$\Rightarrow P_X \perp$ Lebesgue Maß


0
1/8
1/4
3/8
1/2
5/8
3/4
7/8
1
1/3²
2/3²
1/3
2/3
2/3 + 1/3²
2/3 + 2/3²
1/3³
2/3³
2/3² + 1/3³
2/3² + 2/3³

2.1. Momente

Def 2.5. Sei X ZV. Dann heißt

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X \, dP$$

(★ falls definiert)

Erwartungswert von X. Ist $\int_\Omega |X|^k dP < \infty$ so heißt

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_\Omega X^k dP \quad , k \in \mathbb{N}$$

k-tes Moment von X. Wir schreiben $X \in \mathcal{L}^k(P)$.

Satz 2.6. Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^m$ Zufallsvektor, $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar. Dann:

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^m} h \, dP_X .$$

Beweis. 1) h einfach, also

$$h = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \quad , a_i \in \mathbb{R}_+, A_i \text{ paarweise disj. messbar.}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}(X)\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}(X)]$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \cdot P_X(A_i) = \int_{\mathbb{R}^m} h \, dP_X$$

(2) $h \geq 0$ messbar. Dann gibt es einfache Funktionen $h_1, h_2, \ldots \geq 0$ mit $h_n \nearrow h$, und

$$\mathbb{E}[h(X)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[h_n(X)] \quad \text{(Mon. Kon.)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} h_n \, dP_X$$

$$= \int h \, dP_X \quad \text{(Mon. Kon.)}$$

(3) Allg. h. Es gibt h^+, h^- messbar, ≥ 0, mit $h = h^+ - h^-$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[h] = \mathbb{E}[h^+] - \mathbb{E}[h^-]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h^+ dP_X - \int_{\mathbb{R}} h^- dP_X = \text{Beh.} \blacksquare$$

Kor. 2.7 Sei X ZVec, $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar.

1) Falls X stetig, dann

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^m} h \cdot f_X \, d\lambda$$

wobei $f_X = \frac{dP_X}{d\lambda}$, λ Lebesgue Maß (aus O 3.5)

2) Falls X diskret, dann

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x) \cdot P(X = x)$$

Def 2.8. Sei X ZV, $X \in \mathcal{L}_2(P)$. Die Varianz von X ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert, also

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Satz 2.9 Sei X ZVec, $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ messbar, $t > 0$. Dann

$$P(h(X) \geq t) \leq \mathbb{E}[h(X)]/t$$

Beweis Sei $T = \{x \in \mathbb{R}^m : h(x) \geq t\}$. Dann:

$$\mathbb{E}[h(X)] \geq \mathbb{E}[h(X) \cdot \mathbb{1}_T(X)]$$

$$\geq t \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_T(X)]$$

$$= t \cdot P(X \geq t) \quad \blacksquare$$

Insbesondere:

1) Markov-Ungleichung:

$$P(|X| \geq t) \leq \mathbb{E}[|X|]/t \quad , t > 0.$$

2) Chebyshev-Ungleichung

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$$

für $X \in \mathcal{L}_2(P)$.

3) Exponentielle Chebyshev:

$$P(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda t}} \quad , \lambda > 0.$$