11/05/17

<u>Satz 1.29</u> (Radon-Nikodym) $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, μ, ν σ-endliche Maße. Dann

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow \exists f \geq 0: \mu(A) = \int_A f \, d\nu, \ A \in \mathcal{A}$$

Dichte: $f = d\mu / d\nu$

<u>Satz 1.34</u> (Hahn'sche Zerl.) γ signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gibt es $A \in \mathcal{A}$ mit

A positiv, $\bar{A}$ negativ.

<u>Satz 1.36</u> (Lebesgue'sche Zerlegung)

Seien μ, ν σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gibt es eindeutige Maße μ_a, μ_s und $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ mit

(1) $\mu = \mu_a + \mu_s$

(2) $\mu_a \ll \nu$ (absolut stetiger Teil)

(3) $\mu_s \perp \nu$ (singulärer Teil)

(4) $\mu_a(A) = \int_A f \, d\nu$, $A \in \mathcal{A}$.

Dichte: wie vorher.

<u>Beweis</u>. Betrachte μ, ν endlich. (Allgemein: Übung). Sei

$$F = \left\{ f \geq 0 \text{ messbar} : \int_A f \, d\nu \leq \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{A} \right\}$$

Dann

i) $F \neq \emptyset$, da $f \equiv 0 \in F$.

ii) Falls $f, g \in F$, dann auch $h = \max\{f, g\}$ in F: für $A \in \mathcal{A}$ gilt nämlich

$$\int_A h \, d\nu = \int_{A \cap \{x : f(x) > g(x)\}} f \, d\nu + \int_{A \setminus \{x : f(x) > g(x)\}} g \, d\nu$$
$$\leq \mu(A \cap \{f > g\}) + \mu(A \setminus \{f > g\}) = \mu(A).$$

Sei $\alpha = \sup_{f \in F} \int_\Omega f \, d\nu \leq \mu(\Omega) < \infty$.

Sei $f_1, f_2, \ldots \in F$ so dass $\int_\Omega f_n \, d\nu \to \alpha$, und definiere neue Sequenz:

$$g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\} \in F \Rightarrow g_n \nearrow f.$$
$$f = \sup\{f_1, f_2, \ldots\}.$$

Mit monotoner Konvergenz:

$$\int_A g_n \, d\nu \xrightarrow{n \to \infty} \int_A f \, d\nu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Da $g_n \in F$ ist somit auch $f \in F$.

Wähle:

$$\mu_a = \int f \, d\nu \qquad \mu_s = \mu - \mu_a \geq 0$$

Dann $\mu_a \ll \nu$; bleibt zu zeigen dass $\mu_s \perp \nu$. Betrachte für $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n = \mu_s - \nu/n$$

γ_n ist signiertes Maß. Sei D_n die zu γ_n gehörige positive Menge aus Hahn'scher Zerlegung. Ferner sei

$$N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D_n} \ . \ \left(= \Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right)$$

Dann für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n(N) \leq 0 \Rightarrow \mu_s(N) \leq \frac{\nu(N)}{n}$$

und da $\underline{\mu_s(N) \geq 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_s(N) = 0}$$

Weiter für $A \in \mathcal{A}$

! Trick!

$$\int_A \left(f + \frac{1}{n} \mathbb{1}_{D_n}\right) d\nu = \mu_a(A) + \frac{1}{n} \nu(D_n \cap A)$$
$$= \mu_a(A) + \mu_s(D_n \cap A) - \underbrace{\gamma_n(D_n \cap A_n)}_{\geq 0}$$
$$\leq \mu_a(A) + \mu_s(A) = \mu(A)$$

also $f + \frac{1}{n} \mathbb{1}_{D_n} \in F$. Somit

$$\alpha \geq \int_\Omega \left(f + \frac{1}{n} \mathbb{1}_{D_n}\right) d\nu = \alpha + \frac{1}{n} \nu(D_n)$$

$$\Rightarrow \nu(D_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir erhalten: $\nu(\bar{N}) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) = 0$.

$$\Rightarrow \mu_s \perp \nu.$$

Eindeutigkeit: Übung!

1.7. Produktmaße

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ $i \in \{1,\dots,n\}$ W-Räume, und setze

- $\mathcal{A} = \{ A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i$ für $1 \leq i \leq n \}$
- $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{A})$.

<u>Satz 1.37</u> Es gibt genau ein W-Maß auf $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$ mit

$$P(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i)$$ für alle

$A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{A}$.

$\boxed{\text{Produktmaß mit Marginalen } P_i}$

<u>Satz 1.38.</u> (Fubini) Sei $f \in \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$-$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbar. Falls

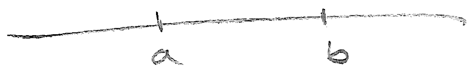
$f \geq 0$ oder $f \in \mathcal{L}^1(P)$

dann

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, dP = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) \, dP_2(x_2) \right) dP_1(x_1).$$

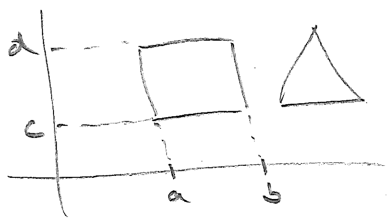
<u>Motivation:</u>

<u>Bsp.</u> $\mathbb{R}$ mit Lebesgue-Maß



$\mu([a,b]) = b - a$

Maß auf $\mathbb{R}^2$:



Hätte gerne:

$\mu^{(2)}([a,b] \times [c,d])$

$= \mu([a,b]) \cdot \mu([c,d])$

$= (b-a)(d-c)$

Was ist dann $\mu^{(2)}$(einem Dreieck)?

$\rightsquigarrow$ σ-Algebra!

2. Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

Eine messbare Abbildung

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt <u>Zufallsvariable</u>.

$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>Zufallsvektor</u>.

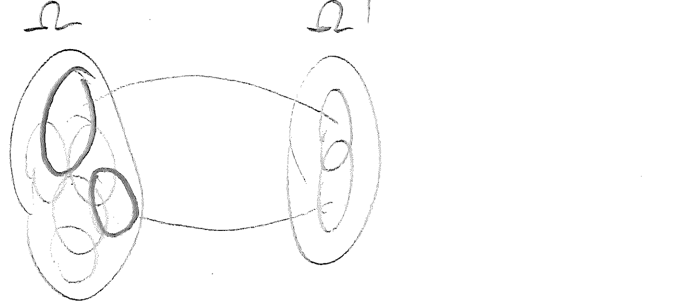
Sei ferner $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbarer Raum, $X : \Omega \to \Omega'$ messbar.

Dann heißt

$\sigma(X) = \{ \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in A' \} : A' \in \mathcal{A}' \} \subseteq \mathcal{A}$

die von X erzeugte σ-Algebra.

Es ist die kleinste σ-Algebra bzgl. der X messbar ist.



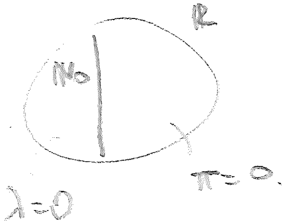
Motivation Lebesguesche Zerlegung

Seien

- λ : Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$
- π : Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$:

$$\pi(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0) = 0 \quad , \quad \pi(\{k\}) = 1 \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann $\pi \perp \lambda$



1) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ messbar, dann

$$\mu_1(A) = \int_A f \, d\lambda \quad , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ein σ-endliches Maß, mit $\mu_1 \ll \lambda$.

2) Seien $a_1, a_2, \ldots \in [0, \infty)$. Setze

$$\mu_2(\{k\}) = a_k \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \mu_2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0) = 0,$$

und für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_2(A) = \int_A g \, d\pi \quad , \quad g(x) = \begin{cases} a_k, & x = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

μ_2 ist dann Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3) Sei $\mu = \mu_1 + \mu_2$

abs. stetig bzgl. λ singulär bzgl. λ.

Aussage: diese Zerlegung gibt es immer, und sie ist eindeutig.

für σ-endliche Maße

Satz 1.36 kann man auch so interpretieren:

μ, ν σ-endlich auf $(\Omega, \mathcal{A})$

$$\Longrightarrow$$

es gibt $N \in \mathcal{A}$ und $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ mit

$$\mu(A) = \int_A f \, d\nu + \mu(A \cap N).$$

und $\nu(N) = 0$.

(f, N) bzw. (μ_a, μ_s) heißen <u>Lebesgue-Zerlegungen</u> von μ.