8/5/17

Def 1.28 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, μ, ν Maße.

a) μ heißt absolut stetig bzgl ν, $\mu \ll \nu$, falls

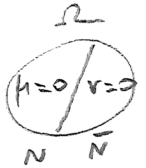
$\forall A \in \mathcal{A}: \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$

b) μ equivalent zu ν, $\mu \approx \nu$, falls

$\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$.

c) μ heißt singulär bzgl ν, $\mu \perp \nu$ falls

$\exists N \in \mathcal{A}: \mu(N) = 0, \nu(\bar{N}) = 0$



Bsp. ν Maß, $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$, $f \geq 0$. Dann $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$, $A \in \mathcal{A}$ ein neues Maß mit $\mu \ll \nu$.

Satz 1.29 (Radon-Nikodym). Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, μ, ν σ-endliche Maße. Dann:

$\mu \ll \nu \iff \exists f \geq 0$ mit $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$.

Man kann zeigen: f ist eindeutig bis auf Nullmengen bzgl ν.

f heißt (R-N-) Dichte/Ableitung von μ bzgl ν. Wir schreiben: $f = \frac{d\mu}{d\nu}$.

Def 1.30 Eine Abbildung $\gamma: \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$ heißt signiertes Maß, falls

- $\gamma(\emptyset) = 0$
- für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt

$$\gamma\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma(A_n) \quad (\sigma\text{-Add})$$

Bsp. 1) Sei ν Maß, $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Dann

$\gamma(A) = \int_A f \, d\nu$ signiertes Maß.

2) Seien μ_1, μ_2 Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann

$\gamma(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$, $A \in \mathcal{A}$ signiertes Maß für $\mu_2(\Omega) < \infty$.

Umkehrung?

Def 1.31 Sei γ signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. $A \in \mathcal{A}$ heißt positiv (negativ), falls $\gamma(B) \geq 0$ ($\gamma(B) \leq 0$) für alle $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$.

Lemma 1.32 1) Sei $A \in \mathcal{A}$ positiv, $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$. Dann B positiv.

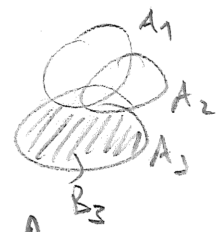
2) seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ positiv. Dann $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ positiv.

$\boxed{\text{Analog: negativ}}$

Beweis 1) Aus Def.

2) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$B_n := A_n \cap \Big(\bigcap_{m=1}^{n-1} \bar{A}_m\Big)$



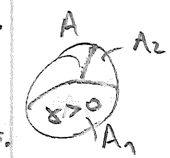
Dann $B_n \subseteq A_n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A$.

Sei $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, $H_n = B \cap B_n$. H_n ist positiv, da $H_n \in B_n \subseteq A_n$; insbesondere $\gamma(H_n) \geq 0$. Insgesamt

$$\gamma(B) = \gamma\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n\Big) \underset{(\sigma\text{-Add})}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma(H_n) \geq 0.$$

Lem. 1.33 Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\gamma(A) < 0$. Dann existiert $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$, so dass B negativ und $\gamma(B) < 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung: A ist nicht negativ. Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ die kleinste nat. Zahl, so dass $A_1 \subseteq A$, $A_1 \in \mathcal{A}$ mit $\gamma(A_1) > 1/N_1$ existiert. Sei



$B_2 = A \setminus A_1$.

Falls B_2 negativ: ✓. Sonst: Sei N_k die kleinste nat. Zahl so dass $A_k \subseteq B_k$, $A_k \in \mathcal{A}$ existiert mit $\gamma(A_k) > 1/N_k$. Sei

$B_k = A \setminus (A_1 \cup \ldots A_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Falls alle B_k nicht negativ, setze

$$B := A \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Es gilt mit σ-Add

$$\underbrace{\gamma(A)}_{\in(-\infty,0)} = \gamma(B) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\gamma(A_n)}_{>0}$$

also $\gamma(B) \leq \gamma(A) < 0$. Außerdem hat B keine Teilmenge C, $C \in \mathcal{A}$ mit $\gamma(C) > 0$, sonst wäre $\gamma(C) > 1/N$ für ein $n \in \mathbb{N}$. ∎

<u>Satz 1.34</u> (Hahn'sche Zerlegung). Sei γ signiertes Maß. Dann gibt es $A \in \mathcal{A}$, sodass

A positiv und $B = \Omega \setminus A$ negativ.

<u>Beweis</u>. Sei

$$c := \inf \{ \gamma(B) : \underset{\text{negativ}}{\overset{B \in \mathcal{A},}{B}} \} \leq 0$$

Sei $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mit $\gamma(B_n) \searrow c$ und negative Mengen

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Dann B negativ (Lem. 1.32) und

$$\gamma(B) \geq c.$$

Ferner

$$\gamma(B) = \gamma(B_n) + \underbrace{\gamma(B \setminus B_n)}_{\substack{\gamma(B \setminus B_n) \leq 0 \\ B \text{ neg.}}} \leq \gamma(B_n)$$

Also $\gamma(B) = c$, und das inf wird angenommen. $\Rightarrow c > -\infty$.

Sei $A = \Omega \setminus B$. Falls A nicht positiv, sei $E \subseteq A$, $E \in \mathcal{A}$ mit $\gamma(E) < 0$. Mit Lem 1.33: es gibt $F \subseteq E \subseteq A$, $F \in \mathcal{A}$, F negativ, $\gamma(F) < 0$.

Dann ist aber

$$\gamma(F \cup B) = \gamma(F) + \gamma(B) < \gamma(B)$$

und $F \cup B$ negativ. ↯ ∎

[Wir können ohne Beschränkung annehmen, dass $C \subseteq \Omega$, $C \in \mathcal{A}$ existiert mit $\gamma(C) < 0$; mit Lem 1.33 gibt es mind ein negatives B]

<u>Korollar 1.35</u> Sei γ signiertes Maß. Dann gibt es ein Maß μ^+ und ein endliches Maß μ^- mit $\gamma = \mu^+ - \mu^-$.

<u>Beweis</u>. Sei $(A, \bar{A})$ Hahn'sche Zerlegung von Ω. Setze für $B \in \mathcal{A}$

$$\mu^+(B) = \underbrace{\gamma(B \cap A)}_{\geq 0} \qquad \mu^-(B) = -\underbrace{\gamma(B \cap \bar{A})}_{\substack{\leq 0 \\ > -\infty}}$$ ∎

<u>Satz 1.36</u>. (Lebesgue'sche Zerlegung) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, μ, ν, σ-endliche Maße. Dann gibt es eindeutige Maße μ_a, μ_s mit

$$\mu = \mu_a + \mu_s, \quad \mu_a \ll \nu, \quad \mu_s \perp \nu.$$

Ferner existiert $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ mit

$$\mu_a(A) = \int_A f \, d\nu$$

Wir nennen f die <u>Dichte von μ bzgl ν</u>, und schreiben

$$f = \frac{d\mu}{d\nu}.$$

<u>Beweis</u>. nächste VO.