27/4/17

Satz 1.14 Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$. Dann $X: \Omega \to \Omega'$ genau dann messbar, wenn

$$X^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{A}$$

Beweis. "$\Rightarrow$" aus Definition.

"$\Leftarrow$" Sei

$$\mathcal{H} = \{A' \in \mathcal{A}' : X^{-1}(A') \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}' \quad (*)$$

Dann ist $\mathcal{H}$ eine σ-Algebra:

1) $\Omega' \in \mathcal{H}$, da $X^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$.

2) Sei $A' \in \mathcal{H}$. Dann

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}.$$

Da $\mathcal{A}$ σ-Algebra ist auch

$$\overline{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}} \in \mathcal{A}$$
$$\shortparallel$$
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \overline{A'}\}$$

Somit $X^{-1}(\overline{A'}) \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A'} \in \mathcal{H}$

3) Seien $A_1', A_2', \ldots \in \mathcal{H}$. Dann:

$\forall n \in \mathbb{N} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_n'\} \in \mathcal{A}$.

Da $\mathcal{A}$ σ-Algebra:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_n'\} \in \mathcal{A}$$
$$\shortparallel$$
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n'\}$$

Somit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n' \in \mathcal{H}$.

Es gilt: $X^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{A}$ (Voraussetzung) und somit $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{H}$. Daher

$$\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{H}. \quad \text{(Lem 1.8)}$$

Mit $(*)$: $\mathcal{A}' = \mathcal{H}$. ∎

1.3. Wahrscheinlichkeitsmaße

Def 1.15. Sei $\mathcal{A}$ Mengensystem auf Ω. Eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ heißt **Prämaß**, falls

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, dann $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

(σ-Additivität).

Ist $\mathcal{A}$ σ-Algebra, dann heißt μ **Maß**.

Ferner heißt μ

- Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(\Omega) = 1$.
- endlich, falls $\mu(\Omega) < \infty$
- σ-endlich, falls $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ existieren mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$.

In der W-Theorie: "P" statt "μ"

probability

Bsp 1.16. Lebesgue Maß

$\rightarrow$ eindeutiges Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mu([a,b]) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$

Das Lebesgue Maß

- auf $\mathbb{R}$ ist σ-endlich
- in beschränktem Intervall endlich
- auf $[0,1]$ ein W-Maß

Wir schreiben für Mengen A, $A_1, A_2, \ldots$ dass

$A_n \searrow A$, falls $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$

$A_n \nearrow A$, falls $A_{n+1} \supseteq A_n$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$

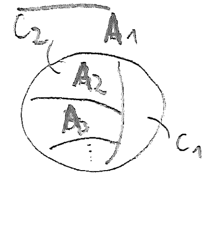
Satz 1.17 Sei $\mu: \mathcal{A} \to [0,1]$ additiv mit $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$, wobei $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω.

Dann ist μ σ-Additiv genau dann wenn

$$\mu(A_n) \to \mu(A) \text{ für alle } A_n \searrow A \text{ in } \mathcal{A}.$$

[auch $\nearrow$]

Beweis "$\Rightarrow$"



Sei $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann sind die C_n's disjunkt, und disjunkt von A. Außerdem

$$A_n = A \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Da μ σ-Additiv:

(**) $\mu(A_n) = \mu(A) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(C_k)$, $n \in \mathbb{N}$.

Da $\mu(A_n) < \infty$ erhalten wir für $n=1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) < \infty.$$

Somit $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(C_k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und aus (**)

$$\mu(A_n) \to \mu(A).$$

"$\Leftarrow$" Sei $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$. Da μ additiv

$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + \mu\Big(\bigcup_{k>n} A_k\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu\Big(\bigcup_{k>n} A_k\Big)$$

Es gilt: $\bigcup_{k>n} A_k \searrow \emptyset$. Somit

$$\mu\Big(\bigcup_{k>n} A_k\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \to \sum_{k\geq 1} \mu(A_k).$$

1.4 Eindeutigkeit von W-Maßen

Sei P_1 W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}_1)$, P_2 W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}_2)$, sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.
Angenommen $P_1(A) = P_2(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$.
Gilt dann $P_1(A) = P_2(A)$ $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$?

Bsp. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = 2^{\Omega}$,
$\mathcal{E} = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$. und für $A \subseteq \Omega$

$$P_1(A) = \frac{|A|}{4} \qquad P_2(A) = \frac{|A \cap \{1,4\}|}{2}.$$

Dann: $\sigma(\mathcal{E}) = 2^{\Omega}$, $P_1 \neq P_2$, aber

$$\forall A \in \mathcal{E}: P_1(A) = 1/2 = P_2(A).$$

Problem: P_1, P_2 stimmen auf $\mathcal{E}$ überein, aber: nicht im Schnitt von zwei Mengen in $\mathcal{E}$.

Satz 1.18 Seien P_i, $i \in \{1,2\}$ W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A}_i)$. Ferner sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ $\cap$-stabil und $P_1(A) = P_2(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$.
Dann $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$: $P_1(A) = P_2(A)$.

Beweis folgt...

⌈Mengensystem $\mathcal{E}$ heißt $\cap$-stabil, falls $\forall A, B \in \mathcal{E}: A \cap B \in \mathcal{E}$⌋.

Def 1.19 Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ über Ω heißt Dynkin-System, falls

(D1) $\Omega \in \mathcal{D}$
(D2) $A, B \in \mathcal{D}$, $B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$
(D3) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \in \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$

Satz 1.20. Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ Mengensystem auf Ω. Dann existiert kleinstes Dynkin-System $\delta(\mathcal{A})$ das $\mathcal{A}$ enthält und

$$\delta(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}} \mathcal{D}$$

$\mathcal{D}$ Dynkin-System über Ω

Beweis. Wie in Satz 1.7 (Übung!).

Satz 1.21 Sei $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiles Mengensystem über Ω. Dann $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$.

Beweis folgt...

Beweis (Satz 1.18). Sei

$$\mathcal{D} = \{A \in \sigma(\mathcal{E}) : P_1(A) = P_2(A)\} \subseteq \sigma(\mathcal{E}). \quad (+)$$

Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System:

(D1) $P_1(\Omega) = 1 = P_2(\Omega) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}$.

(D2) Seien $A, B \in \mathcal{D}$, $B \subseteq A$. Da P_1, P_2 additiv:

σ-Algebra $\mathcal{A}$

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$
(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ | oder $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
(iii) $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

$P_1(A) = P_1(A \setminus B) + P_1(B)$
$P_2(A) = P_2(A \setminus B) + P_2(B)$
$\Rightarrow P_1(A \setminus B) = P_2(A \setminus B)$, also $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(D3) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow A$. Mit Satz 1.17

$$P_1(A) = \lim_{n\to\infty} P_1(A_n) = \lim_{n\to\infty} P_2(A_n) = P_2(A).$$