Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 13

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Aussage des counting lemmas für Dreiecke qualitativ auch dann gilt, wenn nur 2 der drei Paare ε-regulär sind.

Sei $0 < \varepsilon < 1/3, \delta > 4\varepsilon$. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $3n$ Knoten, wobei $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ mit $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$. Ferner

- seien die Paare $(V_1, V_2), (V_1, V_3)$ ε-regulär und
- $d(V_i, V_j) \geq \delta$, $1 \leq i < j \leq 3$.

Zeigen Sie: es gibt eine Konstante $C = C(\varepsilon, \delta) > 0$ so dass G mindestens Cn^3 K_3's enthält.

Lösung Wir zeigen, dass es 'viele' Knoten in V_2 gibt, die einen großen Grad in V_1 und V_3 haben; wir zeigen, dass für die Menge

$$\overline{V}_2 = \{v \in V_2 : |N(v) \cap V_1| \geq \varepsilon n, |N(v) \cap V_3| \geq \varepsilon n\}$$

gilt, dass $|\overline{V}_2| \geq \varepsilon n$. Sei dazu $V_2' \subseteq V_2$ die Menge der Knoten mit mindestens $(\delta - \varepsilon)|V_1| \geq \varepsilon n$ Nachbarn in V_1. Es ist also $|V_2'| \geq (1 - \varepsilon)n$ nach Lemma 9. Ferner sei $V_2'' \subseteq V_2$ die Menge der Knoten mit mindestens $\varepsilon|V_3|$ Nachbarn in V_3. Aus der Annahme an $d(V_2, V_3)$ erhalten wir

$$4\varepsilon n^2 \leq e(V_2, V_3)$$

und aus der Definition von V_2''

$$e(V_2, V_3) \leq |V_2''|n + (n - |V_2''|)\varepsilon n \leq |V_2''|n + \varepsilon n^2.$$

Insgesamt ist $|V_2''| \geq 3\varepsilon n$ und somit $|\overline{V}_2| \geq \varepsilon n$, wie behauptet.

Jeder Knoten $v \in \overline{V}$ hat $\geq \varepsilon n$ Nachbarn in V_1 und V_3. Aus der Regularität des Paares (V_1, V_3) folgt, dass

$$e(N(v) \cap V_1, N(v) \cap V_3) \geq (\delta - \varepsilon) \cdot \varepsilon n \cdot \varepsilon n \geq 3\varepsilon^3 n^2.$$

Jede dieser Kanten induziert ein Dreieck in G und somit hat G mindestens $3\varepsilon^4 n^3$ Dreiecke.

Aufgabe 2

Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass jeder Graph G mit $n \geq n_0$ Knoten und der Eigenschaft, dass jede Kante in G in genau einem Dreieck enthalten ist, höchstens εn^2 Kanten hat.

Lösung Das triangle removal lemma besagt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $\delta > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass jeder Graph mit $n \geq n_0$ Knoten und höchstens δn^3 Dreiecken dreiecksfrei gemacht werden kann, indem höchstens εn^2 Kanten gelöscht werden.

Der Graph G aus der Aufgabenstellung hat die Eigenschaft, dass jede Kante in genau einem Dreieck enthalten ist. Damit hat G höchstens $n^2 = \frac{1}{n} n^3$ Dreiecke, und deswegen kann er mit triangle removal für n groß genug dreiecksfrei gemacht werden, indem $\varepsilon n^2/3$ Kanten gelöscht werden. Da aber jede Kante in genau einem Dreieck enthalten ist, hat G höchstens $\varepsilon n^2/3$ Dreiecke, also höchstens εn^2 Kanten.

Aufgabe 3

Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt. Sei G ein Graph mit $v(G) = n \geq n_0$ und $e(G) \geq (1/4 + \varepsilon)n^2$. Dann hat G mindestens δn^3 Dreiecke.

Lösung Sei $\Pi = (V_i)_{i=0}^k$ eine $\varepsilon/8$-reguläre Partition von G mit $k \geq 8/\varepsilon$. Sei weiter R der $(\varepsilon/8, \varepsilon/8)-$reduzierte Graph von Π, dh.

$$V(R) = \{V_1, \ldots, V_k\}, \quad E(R) = \{V_iV_j : d(V_i, V_j) \geq \varepsilon/8, (V_i, V_j)\ \varepsilon/8\text{-regulär}\}$$

Wir zeigen nun, dass R 'viele' Kanten hat – so viele, dass R nach Turan's Satz ein Dreieck enthalten muss. Dazu zählen wir die Kanten in G. Für jedes Paar $V_iV_j \in E(R)$ enthält G höchstens $(n/k)^2$ Kanten; für jedes andere reguläre Paar höchstens $\frac{\varepsilon}{8}(n/k)^2$ Kanten, und für jedes andere Paar (wovon es $\leq \varepsilon k^2/8$ viele gibt) höchstens $(n/k)^2$ Kanten. Außerdem gibt es höchstens $(n/k)^2$ Kanten in jedem V_i, und höchstens $\varepsilon n^2/8$ Kanten mit Knoten in V_0. Somit enthält G höchstens

$$e(G) \leq e(R)\left(\frac{n}{k}\right)^2 + \binom{k}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{n}{k}\right)^2 + \varepsilon 8k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 + k \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{8}n^2$$

Kanten. Da $k \geq 8/\varepsilon$ und aus der Annahme $e(G) \geq (1/4 + \varepsilon)n^2$ erhalten wir

$$\frac{1}{4} + \varepsilon \leq \frac{e(R)}{k^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

und daraus

$$e(R) \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)k^2.$$

Somit, nach dem Satz von Turan, enthält R ein Dreieck. Mit dem Counting Lemma enthält G mindestens δn^3 Dreiecke für ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Aufgabe 4

Sei $0 < \varepsilon < 1, \delta > 2\sqrt{\varepsilon}$. Sei (V_1, V_2) ε-regulär mir $d(V_1, V_2) \geq \delta$ und $|V_1| = |V_2| = n$. Zeigen Sie, dass für jede Menge $V_1' \subseteq V_1, |V_1'| \geq 2\sqrt{\varepsilon}n$

$$|N(V_1') \cap V_2| \geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\delta + \varepsilon}\right)n.$$

Lösung Mit dem Degree Lemma (Lemma 9) wissen wir, dass für $H = \{x \in V_1 : |N(x) \cap V_2| < (\delta - \varepsilon)n\}$ gilt, dass $|H| \leq \varepsilon n$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

- $|N(V_1') \cap V_2| \leq \varepsilon n$. Dann:

  $$e(V_1', N(V_1') \cap V_2) \leq |N(V_1') \cap V_2| n \leq \varepsilon n^2$$

  und

  $$e(V_1', N(V_1') \cap V_2) \geq |V_1' \setminus H|(\delta - \varepsilon)n \geq (|V_1'| - \varepsilon n)(\delta - \varepsilon)n \geq \sqrt{\varepsilon}(\delta - \varepsilon)n^2$$

  Zusammen gibt das

  $$\sqrt{\varepsilon}(\delta - \varepsilon) \leq \varepsilon \Rightarrow \delta \leq \varepsilon + \sqrt{\varepsilon},$$

  ein Widerspruch zu $\delta \geq 2\sqrt{\varepsilon}$.

- Es bleibt also nur der Fall $|N(V_1') \cap V_2| > \varepsilon n$. Dann mit Regularität

  $$(\delta - \varepsilon)|V_1'||V_2| \leq e(V_1', V_2) = e(V_1', N(V_1') \cap V_2) \leq (\delta + \varepsilon)|V_1'||N(V_1') \cap V_2|$$

  und somit gilt $(\delta - \varepsilon)n \leq (\delta + \varepsilon)|N(V_1') \cap V_2|$ und schließlich

  $$|N(V_1') \cap V_2| \geq \frac{\delta - \varepsilon}{\delta + \varepsilon} n = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\delta + \varepsilon}\right) n.$$