

Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 11

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Die Aufgaben werden in der Übung am 8.7. besprochen.

Aufgabe 1

Konstruieren Sie eine Sequenz von Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 0) = 1$.

Aufgabe 2

Sei $p \in [0, 1)$. Zeigen Sie, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit $G_{n,p}$ keinen Knoten mit $n - 1$ Nachbarn hat.

Aufgabe 3

Sei $k \geq 2$. Bestimmen Sie die Schwellenwertfunktion für die Eigenschaft, dass $\delta(G_{n,p}) \geq k$.

Aufgabe 4

Eine Eigenschaft \mathcal{E} von Graphen heisst *monoton steigend*, wenn für Graphen G, H mit $V(G) = V(H)$ gilt, dass

$$G \text{ hat } \mathcal{E} \text{ und } G \subset H \Rightarrow H \text{ hat } \mathcal{E}.$$

Sei $0 < \epsilon < 1$ und $0 < p(n) = p < 1$ gegeben und es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G_{n,p} \text{ hat } \mathcal{E}) > \epsilon,$$

wobei \mathcal{E} monoton steigend ist. Sei $q = \min\{1, p \log(1/\epsilon)/\epsilon\}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(G_{n,q} \text{ hat } \mathcal{E}) > 1 - \epsilon.$$

Diskutieren Sie die Konsequenz dieser Aussage für die Existenz von starken Schwellenwerten.

Hinweis: Betrachten Sie $G_{n,q}$ als die disjunkte Vereinigung von vielen $G_{n,p}$'s.

Aufgabe 5

Sei $B_{n,n,p}$ ein zufälliger bipartiter Graph mit jeweils n Knoten in den Partitionen, wobei jede mögliche Kante unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p eingefügt wird. Bestimmen Sie die Schwellenwertfunktion für die Eigenschaft „ $B_{n,n,p}$ enthält einen Kreis mit 4 Knoten“.