Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 7

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Aufgabe 1

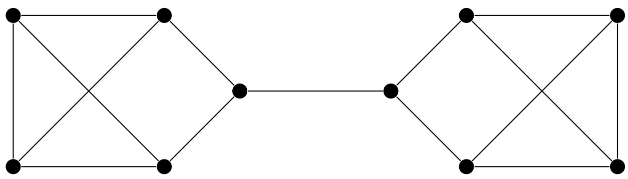
Ein Graph heisst *kubisch*, wenn alle Knoten Grad drei haben.

a) Für welche $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen kubischen Graphen mit $\kappa(G) = k$? Konstruieren Sie für solche k jeweils einen kubischen Graphen mit $\kappa(G) = k$.

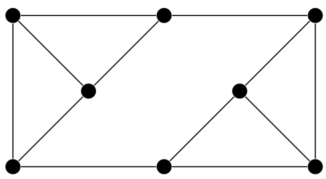
b) Sei G ein kubischer Graph. Zeigen Sie, dass $\kappa(G) = \lambda(G)$.

Lösung:

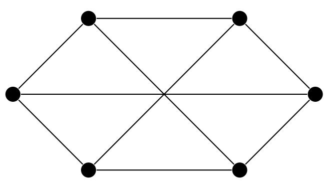
a) Nach Lemma 4.5 gilt, dass $\kappa \leq \delta$. Da G kubisch ist, ist also $\kappa \in \{1, 2, 3\}$. Beispielgraphen sind in jedem Fall möglich:
$\kappa = 1$: Zwei Häuser vom Nikolaus, jeweils eine Kante fehlt, miteinander verbinden.



$\kappa = 2$: Cut aus zwei Knoten in der Mitte, zwei Komponenten aus jeweils einem Dreieck. Jeweils passende Kanten zum Cut.



$\kappa = 3$: Kreis aus sechs Knoten mit einer Diagonalen pro Knoten.



b) $\lambda \geq \kappa$ ist klar wegen Lemma 3.4. Bei $\kappa = 1$ besteht der Cut aus einem Knoten, der zu einer potentiellen Komponente nur eine Kante besitzt. Bei $\kappa = 2$ besteht der Cut aus zwei Knoten, die jeweils wieder zu einer Komponente nur eine Kante besitzen. Entferne diese. Für $\kappa = 3$ gilt $3 = \kappa \leq \lambda \leq \delta = 3$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Knotenzusammenhang vom Hyperwürfel $Q_d, d \in \mathbb{N}$. (Siehe auch A2 in Blatt 5.)

Lösung :
Da $\delta(Q_d) = \Delta(Q_d) = d(v) = d$ für alle $v \in V(Q_d)$ ist $\kappa \leq d$. Wir zeigen per Induktion, dass es zwischen zwei Knoten $x, y \in V(Q_d)$ immer d kreuzungsfreie Pfade gibt.
Induktionsanfang: $d = 1$: klar
$d \to d+1$: Wir zerlegen Q_{d+1} wie folgt: für $1 \leq j \leq d+1$ seien $Q_j^{(0)}$ und $Q_j^{(1)}$ zwei d-dimensionale Hyperwürfel mit $V(Q_j^{(0)}) = \{(v_1, \dots v_{j-1}, 0, v_j, v_d) : v = (v_1, \dots v_d) \in Q_d\}$ und $V(Q_j^{(1)}) = \{(v_1, \dots v_{j-1}, 1, v_j, v_d) : v = (v_1, \dots v_d) \in Q_d\}$. Dann ist $V(Q_j^{(0)}) \cup V(Q_j^{(1)}) = V(Q_{d+1})$ für alle $1 \leq j \leq d+1$. Sei für $z = (z_1, \dots, z_{d+1}) \in Q_{d+1}$ und $1 \leq j \leq d+1$ durch $z^j = (z_1, \dots z_{j-1}, z_j + 1 \mod 2, z_{j+1}, z_{d+1})$ der benachbarte „Spiegelknoten" von z in Q_j gegeben. Insbesondere ist $zz^j \in E(Q_{d+1})$ für alle $1 \leq j \leq d+1$. Setze $\bar{i} = i + 1 \mod 2$.
Seien nun $x, y \in V(Q_{d+1})$.

- Angenommen $\exists\ 1 \leq j \leq d+1$ sodass $x_j = y_j$, d.h. $\exists\ i \in \{0,1\}$ sodass $x, y \in Q_j^{(i)}$. Da $Q_j^{(i)}$ ein d dimensionaler Hyperwürfel ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung d kreuzungsfreie Pfade $P_1, \dots, P_d$ von x nach y innerhalb von $Q_{d+1}[V(Q_j^{(i)})]$. Seien $x^j, y^j \in V(Q_j^{(\bar{i})})$ die Spiegelknoten von x und y und sei weiter P^j ein Pfad von x^j nach y^j mit Knoten aus $V(Q_j^{(\bar{i})})$. Dieser existiert nach Induktionsvoraussetzung. Wir setzen $P_{d+1} = xP^jy$. Somit sind dann $P_1, \dots, P_d, P_{d+1}$ genau $d+1$ kreuzungsfreie x-y-Pfade.
- Angenommen $\forall\ 1 \leq j \leq d+1$ gilt $x_j \neq y_j$. Dann $\exists\ i \in \{0,1\}$, sodass $x \in Q_1^{(i)}, y \in Q_1^{(\bar{i})}$ und $y^1 \neq x$ (y^1 Spiegelknoten von y). Desweiteren gibt es nach Induktionsvoraussetzung d kreuzungsfreie Pfade $P_1, \dots, P_d$ innerhalb von $Q_{d+1}[V(Q_1^{(i)})]$ von x nach y^1. Da sich x und y^1 in genau d Koordinaten unterscheiden, haben diese Pfade mindestens Länge d. Für $P = xv_2 \dots v_k y^1, k \geq d$ sei $P_j^1(P)$ gegeben durch $P_j^1(P) = xv_2 \dots v_j {v_j}^1 \dots {v_k}^1 y$, $2 \leq j \leq k$. Dann sind auch die Pfade $P_2^1(P_2), \dots, {P_d}^1(P_d)$ kreuzungsfreie Pfade von x nach y. Setze$P_1^1 = x^1 v_1^1 \dots v_k^1 y^1$ wenn $P_1 = xv_1 \dots v_k y$ für ein $k \geq d$. Dann sind die Pfade $P_2^1(P_2), \dots, {P_d}^1(P_d), P_1 y, xP_1^1$ kreuzungsfreie Pfade von x nach y

Aufgabe 3

Sei $k \geq 2$ und G ein k-zusammenhängender Graph mit $\geq 2k$ Knoten. Zeigen Sie, dass G einen Kreis mit mindestens $2k$ Knoten enthält.

Lösung:
Wir beweisen zuerst das Fächer-Lemma: In einem k-zusammenhängenden Graphen G gibt es zwischen einem Knoten v und einer Knotenmenge A mit $|A| \geq k$ und $v \notin A$ mindestens k v-A-Pfade, die sich nur in v schneiden.
Für den Beweis fügen wir zu G einen Knoten a hinzu, sodass $N(a) = A$. Es ist klar, dass keine Menge mit $< k$ Knoten diesen neuen Graphen trennen kann, der k-Zusammenhang bleibt also erhalten. Wenden wir nun den Satz von Menger auf die Knoten a, v an, so erhaten wir die gewünschten Pfade, die natürlich durch A verlaufen müssen.
Nehme nun an, G enthält keinen Kreis mit mindestens $2k$ Knoten. Sei C ein maximaler Kreis, also $|C| < 2k$. Wir wählen einen beliebigen Knoten $v \notin C$ und wenden das Fächerlemma auf v und C an und erhalten k v-C-Pfade. Per Schubfachprinzip müssen zwei dieser Pfade zu in

C benachbarten Knoten führen. Mit diesen beiden Pfaden können wir v in C einfügen. So lässt sich C zu einem größeren Kreis erweitern, ein Widerspruch.

Aufgabe 4

Sei G 2-zusammenhängend, $v(G) > 3$ und $e \in E(G)$. Zeigen Sie, dass $G \setminus e$ oder G/e 2-zusammenhängend ist.

Lösung :
Sei $e = \{a, b\}$.
1. Fall: $X = a, b$ ist ein Cut. Dann ist $G \setminus e$ zusammenhängend.
2. Fall: $G[V \setminus \{a, b\}]$ ist zusammenhängend. Dann liegt in jedem Cut von G mindestens ein zusätzlicher Knoten $z \neq a, b$. In G/e müssen also mindestens z und v_e entfernt werden, um den Graphen zu trennen.

Aufgabe 5

Ein Graph $G = (V, E)$ heisst *bipartit*, falls V in zwei Mengen A, B partitioniert werden kann, so dass $E \cap \binom{A}{2}, E \cap \binom{B}{2} = \emptyset$. Überlegen Sie sich, dass

$$G \text{ bipartit} \Leftrightarrow G \text{ hat keine ungeraden Kreise als Teilgraphen.}$$

Sei G nicht-bipartit und 3-zusammenhängend. Zeigen Sie:
a) G enthält einen ungeraden Kreis C mit $v(C) < v(G)$.
b) G enthält mindestens vier ungerade Kreise.

Lösung :

Wir zeigen zuerst die äquivalente Definition von *bipartit*. Ist ein Graph $G = (A \cup B, E)$ bipartit, so gilt für jeden Kreis $C = (x_0, x_1, \dots, x_\ell, x_0)$ mit $x_0 \in A$, dass $x_{2i} \in A$ und $x_{2i+1} \in B$ für alle $0 \leq i < \ell$. Hat dieser Kreis nun ungerade Länge, dann ist $x_\ell \in A$. Das ist aber ein Widerspruch, da $x_0 \in A$ und deswegen $x_\ell x_0 \notin E$. Enthält andererseits $G = (V, E)$ keine ungeraden Kreise, so kann man die Knotenmenge wie folgt in zwei Mengen partitionieren. Man wähle in jeder Zusammenhangskomponente C_i von G einen Knoten v_i willkürlich aus und färbe ihn rot. Ausgehend von diesen Knoten v_i färbt man nun jeden Knoten in C_i, dessen kürzester Pfad zu v_i ungerade Länge hat blau und Knoten in C_i die kürzesten Pfad zu v_i gerader Länge haben rot. Es kann keine Kante zwischen Knoten gleicher Farbe geben: Seien u, w Knoten der Komponente C_i gleicher Farbe , sodass $uw \in E$. OBdA. ist der kürzeste Pfad von u und w nach v_i (nennen wir sie P_u, bzw P_w) gleich lang, da sonst entweder u oder w in einer anderen Farbe gefärbt wäre. Sei z der letzte Schnittpunkt von P_u und P_w, d.h. die Pfade von z nach u bzw. z nach w (nennen wir sie P_u^z und P_w^z) schneiden sich nicht. Desweiteren sind P_u^z und P_w^z gleich lang, da sonst die Minimalität von P_u oder P_w verletzt wäre. Nun bilden aber P_u^z und P_w^z zusammen mit der Kante uw einen ungeraden Kreis, was ein Widerspruch ist. Partitionieren der Knotenmenge in blaue und rote Knoten bildet also einen bipartiten Graph.
Sei nun G nicht-bipartit und 3-zusammenhängend.
a) Da die Hilfsaussage eine Äquivalenz ist, hat G einen ungeraden Kreis C. Ist $v(G)$ gerade, so ist nichts zu zeigen, da sofort $v(C) < v(G)$ folgt. Sei nun $v(G)$ ungerade und $v(C) = v(G)$. Wähle $u \neq v \in C$; da G 3 zusammenhängend ist, gibt es einen Pfad P zwischen u und v der nicht komplett in C enthalten ist. Sei $e = (x, y)$ die erste Kante in P die nicht in C enthalten ist. Da $v(C) = v(G)$ sind $x, y \in C$. Seien P^1, P^2 die Pfade in C von x nach y. Da C ungerade ist entweder P^1 ungerade oder P^2 ist ungerade. Es

induziert also entweder (P^1x) oder (P^2x) einen ungeraden Pfad in G mit Knotenmenge $< v(G)$.

b) Sei C der Kreis aus Teil $a)$ mit $v(C) < v(G)$ und sei weiter $v \in v(G) \setminus v(C)$. Da G 3-zusammenhängend ist und $v(C) \geq 3$, gibt es mindestens drei Pfade $P_1, P_2, P_3 \in G$, sodass diese Startpunkt v haben, unterschiedliche Endpunkte in C und bis auf den Endpunkt nur außerhalb von C verlaufen. Jede zweielementige Teilmenge dieser Pfadmenge induziert einen ungeraden Kreis in G: Sei P_1 ein $v - c_1$ Pfad und P_2 ein $c_2 - v$ Pfad für $c_1 \neq c_2 \in C$. Seien weiter C_1, C_2 die $c_1 - c_2$ Pfade in C. Dann induziert entweder $(P_1C_1P_2)$ oder $(P_1C_2P_2)$ einen ungeraden Kreis, da entweder C_1 oder C_2 gerade ist. Analog für P_1, P_3 und P_2, P_3.

Aufgabe 6

Beweisen Sie die Kanten-Version des Satzes von Menger. *Hinweis: Konstruieren Sie einen Graph, auf dem Sie die Knoten-Version anwenden können.*

Lösung :
Sei G l-kanten-zusammenhängend. Wir definieren den Kantengraph (*line graph*) L von G als $L = (E(G), E')$, wobei $E' = \{ee' : e, e' \in E(G),\, e \cap e' \neq \emptyset\}$. Knoten $e, e' \in V(L)$ sind also genau dann benachbart, wenn sie als Kanten in G einen Knoten gemeinsam haben. Da G ein Graph ohne Mehrfachkanten ist, besitzt L ebenso keine Mehrfachkanten. Wegen des l-Kantenzusammenhangs von G ist L also l-knotenzusammenhängend.
Seien u, v Knoten in $V(G)$, und seien $E(u), E(v)$ die Mengen der Kanten, die mit u bzw. v inzidieren. Da $\lambda \leq \delta$, besitzen $E(u)$ und $E(v)$ mindestens l Elemente. Weil L l-knotenzusammenhängend ist, gibt es für die Knotenmengen $E(u)$ und $E(v)$ in L nach Satz 3.5 genau l disjunkte $E(u)$-$E(v)$-Pfade in L, und damit l kantendisjunkte Pfade in G zwischen $N(v)$ und $N(u)$. Somit gibt es genau l kantendisjunkte Pfade zwischen u und v.