Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 6

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Aufgabe 2

Charakterisieren Sie alle Bäume mit Knotenmenge $[n]$, die die Eigenschaft haben, dass es $1 \leq i < j \leq n$ gibt, so dass der Prüfercode nur die Zahlen i und j enthält.

Lösung Sei $P = p_1 \dots p_{n-2}$ ein Prüfercode und T der zugehörige Baum. Aus der Vorlesung wissen wir: falls $\ell \in [n]$ nicht in P auftaucht, also $p_1, \dots, p_{n-2} \neq \ell$, dann ist ℓ ein Blatt in T. Allgemeiner, falls ℓ genau $k-1$ Mal auftaucht, so ist $d_T(\ell) = k$.

Für den Baum aus der Aufgabenstellung gilt somit:

- die Knoten $[n] \setminus \{i, j\}$ sind Blätter;
- die Knoten i, j haben zusammen n Nachbarn, d.h., $d_T(i) + d_T(j) = n$. Da es nur $n-2$ Blätter gibt, ist $ij \in E(T)$.

Somit besteht ein solcher Baum aus zwei Sternen mit Zentren i und j sowie mit ij als weiterer Kante.

Aufgabe 3

Seien $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Sei G ein Graph mit $k \geq 1$ Komponenten $G_1, \dots, G_k$, so dass $v(G_i) = n_i$. Ein Graph $H = (V(G), E)$ heisst eine *zusammenhängende Erweiterung* von G, falls

- $G \subseteq H$,
- H ist zusammenhängend.

Der Graph H heisst *minimal*, falls er unter allen zusammenhängenden Erweiterungen von G eine kleinste Anzahl von Kanten hat.

a) Charakterisieren Sie alle minimalen zusammenhängenden Erweiterungen von G. *Hinweis: Betrachten Sie einen Graph H', so dass $V(H') = \{G_1, \dots, G_k\}$. Welche Eigenschaften hat H'?*

b) Zeigen Sie: Die Anzahl minimaler zusammenhängender Erweiterungen von G ist

$$\left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^{k-2}.$$

Lösung a) Wir machen zunächst zwei einfache Beobachtungen. Erstens, falls H eine minimale Erweiterung von G ist, dann gibt es für alle $1 \leq i < j \leq k$ höchstens eine $G_i - G_j$ Kante in H; sonst könnte mindestens eine Kante aus H entfernt werden, ohne den Zusammenhang zu zerstören. Zweitens, sei H' ein Graph mit

$$V(H') = \{G_1, \dots, G_k\}, \quad E(H') = \{G_iG_j : \text{ es gibt genau eine } G_i - G_j \text{ Kante in } H\}.$$

Dann ist H' zusammenhängend – sonst gäbe es eine Partition (L, R) von $[k]$ mit der Eigenschaft, dass es keine $\cup_{i\in L} G_i - \cup_{j\in R} G_j$ Kante in H gäbe, und somit wäre H nicht zuasmmenhängend – und kreisfrei – da man sonst eine Kante aus H' und somit aus H entfernen könnte, so dass der restlich Graph immer noch zusammenhängend wäre. H' ist also ein Baum, und aus den zwei Beobachtungen folgt: H ist eine minimale Erweiterung von G ist, genau dann, wenn

- H' ein Baum ist und
- falls $G_iG_j \notin E(H')$, dann gibt es keine $G_i - G_j$ Kante in H;
- falls $G_iG_j \in E(H')$, dann gibt es *genau eine* $G_i - G_j$ Kante in H.

b) Um die Anzahl minimaler zusammenhängender Erweiterungen von G zu bestimmen betrachten wir zunächst einen Baum H' mit Knotenmenge $G_1, \ldots, G_k$. Da für jede Kante G_iG_j in H' genau eine $G_i - G_j$ Kante in einer minimalen zusammenhängenden Erweiterung H gibt, erhalten wir dass die Anzahl minimaler zusammenhängender Erweiterugen mit H' als zugehörigen Baum gegeben ist durch

$$\prod_{G_iG_j\in E(H')} n_i n_j = \prod_{i=1}^{k} n_i^{d_{H'}(i)}.$$

Seien $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$. Nach dem Prüfer-Code ist die Anzahl der Bäume H' mit Gradsequenz $(d_1, \ldots, d_k)$, dh. $d_i = d_{H'}(i)$ für alle $i \in [k]$, gegeben durch den Multinomialkoeffizient $\binom{k-2}{d_1-1,\ldots,d_k-1}$. Wir erhalten also alle minimalen zusammenhängenden Erweiterungen von G indem wir über alle Möglichkeiten $d_1, \ldots, d_k$ zu wählen summieren. Der Multinomialsatz ergibt dann

$$\begin{aligned}\sum \binom{k-2}{d_1-1,\ldots,d_k-1} \prod_{i=1}^{k} n_i^{d_i} &= \prod_{i=1}^{k} n_i \sum \binom{k-2}{d_1-1,\ldots,d_k-1} \prod_{i=1}^{k} n_i^{d_i-1} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^{k-2}.\end{aligned}$$

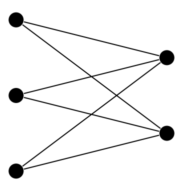
Aufgabe 5

Sei $K_{n,m}$ der vollständige bipartite Graph mit

$$V(K_{n,m}) = [n+m], \quad E(K_{n,m}) = \{ij : 1 \le i \le n, n < j \le n+m\}.$$

Machen Sie sich ein Bild von $K_{n,m}$ und bestimmen Sie $\tau(K_{n,m})$.

Lösung Hier ist ein Bild vom $K_{3,2}$:



Um die Anzahl der Spannbäume von $K_{m,n}$ zu bestimmen, verwenden wir das Matrix-Tree Theorem. Die Adjazenzmatrix A sowie die Gradmatrix D vom $K_{m,n}$ sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{matrix}\right\} m \text{ mal} \\ \left.\begin{matrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\} n \text{ mal} \end{pmatrix}$$

sowie

$$D = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} n & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & n & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\} m \text{ mal} \\ \left.\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & m & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & m \end{matrix}\right\} n \text{ mal} \end{pmatrix}.$$

Um das Matrix-Tree Theorem anzuwenden bestimmen wir die Determinante von $A - D$, wobei wir die erste Zeile und die erste Spalte entfernen. Es gilt

$$(A-D)^{(11)} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} n & & & -1 & \dots & -1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & n & -1 & \dots & -1 \end{matrix}\right\} m-1 \text{ mal} \\ \left.\begin{matrix} -1 & \dots & -1 & m & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ -1 & \dots & -1 & & & m \end{matrix}\right\} n \text{ mal} \end{pmatrix}.$$

Wir machen nun Spaltenumformungen um diese Matrix in obere Dreiecksform zu bringen. Dazu addieren wir jede Spalte zur letzten Spalte. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} n & & & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & n & -1 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & -1 & m & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die ersten $m-1$ Einträge der letzten Spalte sind 0, da wir n Spalten mit Wert -1 zu einer Spalte mit Wert n (und $m-2$ Spalten mit Wert 0) addiert haben. Die letzten n Einträge sind 1, da wir $m-1$ Spalten mit Wert -1 zu einer Spalte mit Wert m (und $n-1$ Spalten mit Wert 0) addiert haben. Addieren wir nun die letzte Spalte zu den ersten $m-1$ Spalten, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} n & & & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & n & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine obere Dreiecksmatrix und diese hat Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Wir erhalten damit $\tau(K_{n,m}) = n^{m-1}m^{n-1}$.

Aufgabe 6

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X \subseteq V$ ein minimaler Trenner von G. Seien $C_1, \dots, C_k$ mit $k \geq 2$ die Komponenten von $G[V \setminus X]$. Zeigen oder widerlegen Sie: für alle $x \in X$ und $1 \leq i \leq k$

$$N_G(x) \cap V(C_i) \neq \emptyset.$$

Lösung Angenommen es gibt $x \in X$ und $1 \leq i \leq k$, sodass

$$N_G(x) \cap V(C_i) = \emptyset.$$

Da $C_1, \dots, C_k$ die Komponenten von $G[V \setminus X]$ sind, gibt es für alle $1 \leq i < j \leq k$ keinen Pfad zwischen Elementen von C_i und C_j. Fügen wir nun x wieder in $G[V \setminus X]$ ein, verbinden wir alle Komponenten, die mit x benachbart sind zu einer neuen Komponente. Da C_i nicht mit x benachbart ist, ist C_i nicht Teil dieser neuen Komponente. Es gibt also weiterhin ≥ 2 Komponenten in $G[V \setminus (X \setminus \{x\})]$, wodurch dieser Graph nicht zusammenhängend ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu X minimaler Trenner.

Aufgabe 7

Sei G ein Graph mit $\delta(G) \geq |V(G)|/2 + t$, wobei $0 \leq t < |V(G)|/2 - 1$. Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \geq 2t + 2$. Ist die Voraussetzung an G bestmöglich?

Lösung Sei $n = v(G)$, $C \subseteq$ ein minimaler Trenner, und x, y zwei Knoten in verschiedenen Komponenten von $G \backslash C$. Dann gilt $x, y \notin E(G)$, die Nachbarn von x und y liegen also alle in $V \backslash \{x, y\}$ liegen. Daraus erhalten wir, dass

$$|N_G(x) \cap N_G(y)| \geq 2(n/2 + t) - (n - 2) = 2t + 2.$$

Jedoch muss jeder Knoten, der sowohl zu x also auch zu y benachbart ist, in C liegen; damit ist $|C| \geq 2t + 2$.

Die Voraussetzung ist bestmöglich. Betrachte dazu zwei vollständige Graphen mit $n/2 + t + 1$ Knoten, die sich auf einer Menge von $2t + 2$ Knoten schneiden. Der entstehende Graph hat n Knoten, $\delta(G) = n/2 + t$ und $k(G) = 2t + 2$, da er nicht mit weniger als den $2t + 2$ Knoten im Schnitt getrennt werden kann.