Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 6

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Die Aufgaben werden in der Übung am 3.6. besprochen.

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie der *Prüfer-Code* eines Baumes berechnet werden kann. Zeigen Sie, wie man aus einem gegebenen Code den zugehörigen Baum rekonstruieren kann.

Aufgabe 2

Charakterisieren Sie alle Bäume mit Knotenmenge $[n]$, die die Eigenschaft haben, dass es $1 \leq i < j \leq n$ gibt, so dass der Prüfercode nur die Zahlen i und j enthält.

Aufgabe 3

Seien $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Sei G ein Graph mit $k \geq 1$ Komponenten $G_1, \ldots, G_k$, so dass $v(G_i) = n_i$. Ein Graph $H = (V(G), E)$ heisst eine *zusammenhängende Erweiterung* von G, falls

- $G \subseteq H$,
- H ist zusammenhängend.

Der Graph H heisst *minimal*, falls er unter allen zusammenhängenden Erweiterungen von G eine kleinste Anzahl von Kanten hat.

a) Charakterisieren Sie alle minimalen zusammenhängenden Erweiterungen von G.
Hinweis: Betrachten Sie einen Graph H', so dass $V(H') = \{G_1, \ldots, G_k\}$. Welche Eigenschaften hat H'?

b) Zeigen Sie: Die Anzahl minimaler zusammenhängender Erweiterungen von G ist

$$\left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right) \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^{k-2}.$$

Aufgabe 4

Das Produkt von zwei Graphen G und H ist der Graph $Q = (V, E)$, so dass

$$V = V(G) \times V(H), \qquad E = \{(u,v)(u',v') : uu' \in E(G), v = v' \text{ oder } vv' \in E(H), u = u'\}.$$

Sei L_n ('ladder') das Produkt von P_2 und P_n.

a) Sei t_n die Anzahl der Spannbäume von L_n. Zeigen Sie, dass $t_n = 4t_{n-1} - t_{n-2}$.

b) Leiten Sie eine geschlossene Form für t_n her!

Aufgabe 5

Sei $K_{n,m}$ der vollständige bipartite Graph mit

$$V(K_{n,m}) = [n+m], \quad E(K_{n,m}) = \{ij : 1 \leq i \leq n, n < j \leq n+m\}.$$

Machen Sie sich ein Bild von $K_{n,m}$ und bestimmen Sie $\tau(K_{n,m})$.

Aufgabe 6

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X \subseteq V$ ein minimaler Trenner von G. Seien $C_1, \ldots, C_k$ mit $k \geq 2$ die Komponenten von $G[V \setminus X]$. Zeigen oder widerlegen Sie: für alle $x \in X$ und $1 \leq i \leq k$

$$N_G(x) \cap V(C_i) \neq \emptyset.$$

Aufgabe 7

Sei G ein Graph mit $\delta(G) \geq |V(G)|/2 + t$, wobei $0 \leq t < |V(G)|/2 - 1$. Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \geq 2t + 2$. Ist die Voraussetzung an G bestmöglich?