Sommersemester 2019

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 4

Prof. Dr. K. Panagiotou/S. Reisser

Die Aufgaben werden in der Übung am 20.05. besprochen.

Aufgabe 1

Aus der Analysis wissen wir, dass $\sum_{k\geq 1} k^{-2} = \pi^2/6$. Zeigen Sie mit Euler Summation, dass für $n \to \infty$

$$H_n^{(2)} = \sum_{1\leq k\leq n} k^{-2} = \pi^2/6 - n^{-1} + O(n^{-2}).$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$

$$e^{H_n + H_n^{(2)}} = n\, e^{\gamma+\pi^2/6} \left(1 - n^{-1}/2 + O(n^{-2})\right).$$

Aufgabe 3

Finden Sie eine Funktion $f(n)$, so dass für $n \to \infty$

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{n^2+k} = f(n) + O(n^{-6}).$$

Hinweis: aus der Vorlesung wissen wir, dass H_n sehr genau approximiert werden kann.

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} k^k.$$

Zeigen Sie, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$Q_n = C\, n^{n^2/2+n/2+1/12}\, e^{-n^2/4}(1 + O(n^{-1})).$$

Aufgabe 5

Sei $0 < \alpha < 1/2$ und $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{0\leq k\leq \alpha n} \binom{n}{k} = 2^{H(\alpha)n-(\ln n)/2+O(1)}.$$

Hinweis: zeigen Sie zuerst, dass $\binom{n}{k-1} < \frac{\alpha}{1-\alpha}\binom{n}{k}$.

Aufgabe 6

Finden Sie eine Funktion $f(n)$, so dass für $n \to \infty$

$$\sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{kH_k} = f(n) + O(1).$$

Hinweis: überlegen Sie sich zuerst, dass $\frac{1}{k(\ln k + O(1))} = \frac{1}{k \ln k} + O(\frac{1}{k(\ln k)^2})$.