6. Die chromatische Zahl

<u>Ziel</u>: bestimme $\chi(G_{n,p})$. Betrachte nur den Fall $p = 1/2$ und schreibe $G_n = G_{n,1/2}$.

Wir wissen: $\chi(G) \geq \frac{v(G)}{\alpha(G)}$ mit $\alpha(G)$ = # Knoten in einer größten unabhängigen Menge.

<u>Lem 6.1.</u> Sei X_k die Anzahl unabhängiger Mengen mit k Knoten in G_n. Dann

$$\mathbb{E}[X_k] = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$$

<u>Beweis</u> # Mgl. k Knoten zu wählen — W-keit, dass keine Kante da $\square$

<u>Daraus</u>:

$$\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}]}{\mathbb{E}[X_k]} = \frac{\binom{n}{k+1} 2^{-\binom{k+1}{2}}}{\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot 2^{-k} \quad (*).$$

Für $k \geq \log n$ (log immer zur Basis 2 !!) ist dies $o(1)$, d.h.

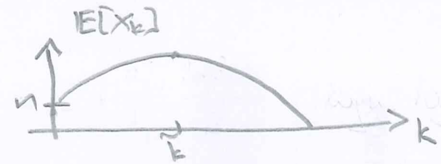
$$\mathbb{E}[X_{k+1}] = o(\mathbb{E}[X_k]) \text{ für } k \geq \log n.$$

<u>Beob.</u> $f(k) = \frac{n-k}{k+1} 2^{-k}$ ist fallend für $1 \leq k \leq n-1$.

Für $k = \log n$ ist dies $o(1)$, für $k = 1$ ist es $\Omega(n)$.

Damit existiert $\tilde{k}$ mit

$$f(k) \geq 1, \ k \leq \tilde{k} \quad , \quad f(k) < 1, \ k > \tilde{k}.$$



Sei $k^* = \max\{k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[X_k] \geq 1\}$. Dann $k^* \geq \log n$.

Benutze die Ungleichung $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$. Für $k = 2\log n$:

$\left(\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k}\right)$
$\to \mathbb{E}[X_k] \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k 2^{-\binom{k}{2}}$

$$\mathbb{E}[X_k] \leq \left(\frac{en}{2\log n}\right)^{2\log n} \cdot 2^{-\binom{2\log n}{2}}$$

$$= 2^{\left\{2\log^2 n - 2\log n \cdot \log(2\log n) + 2\log(e) \cdot \log n - \frac{2(\log n)^2}{2} + \log n\right\}}$$

$$= 2^{\{-\Theta(\log n \cdot \log\log n)\}} = o(1).$$

Damit $k^* \leq 2\log n$. Eine ähnliche (ausführliche) Rechnung zeigt, dass

$$k^* = 2\log n - 2\log\log n + \Theta(1). \quad (**)$$

Für $k = k^* + c$, $c \in \mathbb{R}$ ist mit $(*)$:

$$\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}]}{\mathbb{E}[X_k]} = \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right) \cdot 2^{-2\log n + 2\log\log n + \Theta(1)} \quad (+)$$

$$= \Theta\left(\log n / n\right).$$

Daraus: $1 \leq \mathbb{E}[X_{k^*}] = O\left(n / \log n\right)$ (da $\mathbb{E}[X_{k^*+1}] < 1$)

und damit $\mathbb{E}[X_{k^*+2}] = O\left(\log n / n\right)$

Lem 6.2. Mhw. $\alpha(G_n) \le k^*+1$.

Bew. Wir zeigten $\mathbb{E}[X_{k^*+2}] \to 0$. ⊕

Korollar 6.3 $\chi(G_n) \ge (1-o(1)) \dfrac{n}{2\lg n}$ mhw.

Da $\mathbb{E}[X_{k^*}] \ge 1$ ist mit $(+)$ auch $\mathbb{E}[X_{k^*-c}] = \Omega\left(n^c/\log^c n\right)$.

Satz 6.4. Mhw $\alpha(G_n) \ge k^*-1$.

Bem. Damit $\alpha(G_n) \in \{ k^*-1, k^*, k^*+1\}$ – Konzentration auf ≤ 3 Werte !!

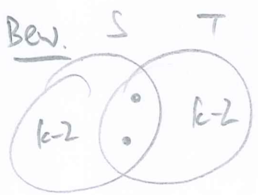
Für den Beweis von Satz 6.4. Betrachte für $S \subseteq [n]$:

$$X_S = \mathbb{1}[\,G_n[S] \text{ ist unabhängig}\,].$$

Sei $k = k^* - c$.

Lem 6.5.
$$\sum_{\substack{S,T \subseteq [n] \\ |S|=|T|=k \\ |S\cap T|=2}} \mathbb{E}[X_S X_T] = \mathbb{E}[X_k]^2 \cdot O\left(\frac{\log^4 n}{n^2}\right).$$

Bew.

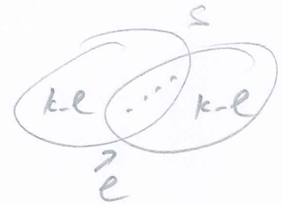


$$\sum = \underset{\substack{\nearrow \\ S}}{\binom{n}{k}} \cdot \underset{\substack{\nearrow \\ S\cap T}}{\binom{k}{2}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ T\setminus S}}{\binom{n-k}{k-2}} \cdot 2^{-2\binom{k}{2}+1}$$

$$\le 2 \cdot \mathbb{E}[X_k]^2 \cdot \binom{k}{2} \cdot \frac{\binom{n}{k-2}}{\binom{n}{k}}$$

$$= \mathbb{E}[X_k]^2 \cdot O\left(k^4/n^2\right).$$ ⊕

Sei
$$\Delta_\ell = \sum_{\substack{S,T \subseteq [n] \\ |S|,|T|=k \\ |S\cap T|=\ell}} \mathbb{E}[X_S X_T]$$



Dann $\Delta_\ell = \binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \cdot \binom{n-k}{k-\ell} \cdot 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{\ell}{2}}$ und

$$\frac{\Delta_\ell}{\Delta_{\ell+1}} = \frac{\ell+1}{k-\ell} \cdot \frac{n-2k+\ell+1}{k-\ell} \cdot 2^{-\ell} \qquad (2 \le \ell \le k-1)$$

$$\ge \frac{(\ell+1)}{(k-\ell)^2} \cdot n \cdot 2^{-\ell}$$

Daraus für $3 \le \ell \le k-1$:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_\ell} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \cdot \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \cdot \ldots \cdot \frac{\Delta_{\ell-1}}{\Delta_\ell}$$

$$\ge \frac{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot \ell}{(k-2)^2 \cdot \ldots \cdot (k-\ell+1)^2} \cdot n^{\ell-2} \cdot 2^{-2-\ldots-(\ell-1)}$$

$$= \Theta(1) \cdot \left(\frac{\ell! \cdot (k-\ell)!}{(k-2)!}\right)^2 \cdot n^{-2} \cdot \frac{n^\ell}{\ell!} \cdot 2^{-\binom{\ell}{2}}$$

$$= \Theta\left(\frac{\log^4 n}{n^2}\right) \cdot 1/\binom{k}{\ell}^2 \cdot \mathbb{E}[X_\ell].$$

Lem 6.6. Sei $c \ge 2$. Dann für $3 \le \ell \le k-1$

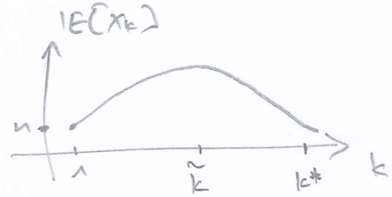
$$\Delta_2/\Delta_\ell \ge n^{1-o(1)}$$

Bew. Für $3 \le \ell \le 10$ ist $\mathbb{E}[X_\ell] = \Theta(n^\ell)$ und damit $\dfrac{\Delta_2}{\Delta_\ell} \ge \Theta\left(\dfrac{\log^{24} n}{n^2}\right) \cdot n^3 = n^{1-o(1)}$ ✓

$k^* = \max\{k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[X_k] \geq 1\}$

$k = k^* - c$. Dann

$$\mathbb{E}[X_k] = \Omega\left(n^c / \log^c n\right).$$



$k^* = 2\log n - 2\log\log n + \Theta(1)$.

Für $k-10 \leq \ell \leq k-1$ ist $\mathbb{E}[X_\ell] \geq n^{3-o(1)}$.

Damit $\frac{\Delta_2}{\Delta_\ell} \geq \Theta\left(\frac{\log^{16} n}{n^2}\right) n^{3-o(1)} = n^{1-o(1)}$.

Ansonsten: $\binom{k}{\ell} \leq 2^k \leq n^2$, und $\mathbb{E}[X_\ell] \geq n^{10-o(1)}$, wegen Monotonie von $\mathbb{E}[X_\ell]$. Damit

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_\ell} \geq \Theta\left(\frac{\log^4 n}{n^2}\right) \cdot n^{-4} \cdot n^{10-o(1)} \geq n^2.$$

Aus Lem 6.5, 6.6 folgt:

$$\mathrm{Var}[X_k] \leq \sum_{\ell=2}^{k-1} \Delta_\ell + \mathbb{E}[X_k]$$
$$\leq \mathbb{E}[X_k]^2 \cdot O\left(\frac{\log^5 n}{n^2}\right) + \mathbb{E}[X_k]$$

Falls $\mathbb{E}[X_k] \to \infty$ dann

$$\frac{\mathrm{Var}[X_k]}{\mathbb{E}[X_k]^2} \to 0 \implies \text{Mit 2. Momentmethode } \alpha(G_n) \geq k$$

$\Rightarrow$ Satz 6.4! Whw $\alpha(G_n) \geq k^* - 2$. ✓

Korollar 6.7. Sei $k \leq k^* - 2$. Dann

$$P(X_k = 0) \leq \exp\left(-O\left(n^2 / \log^4 n\right)\right).$$

Beweis: Mit Jansons Ungleichung:

$$P(X_k = 0) \leq e^{-\mu^2/2\Delta}$$

mit $\mu = \mathbb{E}[X_k]$, $\Delta = \sum_{\ell=2}^{k-1} \Delta_\ell$. ✓

Daraus: ?!

Korollar 6.8. Sei $k = 2\log n - 10 \cdot \log\log n + \Theta(1)$. Dann: whw

$$\forall S \subseteq [n], |S| \geq \frac{n}{\log^2 n} : X_k(G_n[S]) > 0.$$

D.h. jede Teilmenge mit $\geq n/\log^2 n$ Knoten im G_n hat unabhängige Menge mit $(1-o(1))\, 2\log n$ Knoten.

Beweis. Für $s = |S| \geq n/\log^2 n$ gilt

$$k^*(s) \geq k^*\left(n/\log^2 n\right) = 2\log n - 4\log\log n + \Theta(1).$$

Für ein solches festes S ist $G_n[S] \sim G_{|S|}$.

Mit Kor 6.7:

$$P(X_k(G_n[S]) = 0) \leq \exp\left(-O\left(\frac{n^2}{\log^8 n}\right)\right).$$

$\Longrightarrow$

$$P\left(\exists S, |S| \geq n/\log^2 n : X_k(G_n[S]) = 0\right)$$
$$\leq 2^n \cdot e^{-O(n^2/\log^8 n)} = o(1)$$

Satz 6.9 (Bollobas) Mhw. $\chi(G_n) = (1+o(1)) \frac{n}{2\log n}$.

Bew. Untere Schranke. Mhw

$$\chi(G_n) \geq \frac{n}{\alpha(G_n)} \geq \frac{n}{k^*(n)+1} = \frac{n}{(1+o(1))\,2\cdot\log n} \checkmark.$$

Obere Schranke Färbe G_n folgendermassen: entferne eine unabhängige Menge der Größe

$$k = 2\log n - 10\log\log n$$

solange $\geq n/\log^2 n$ Knoten übrig sind. Dies funktioniert mhw.

$$\Rightarrow \chi(G_n) \leq \frac{n}{2\log n - 10\log\log n} + \frac{n}{\log^2 n} = (1+o(1))\frac{n}{2\log n}. \checkmark$$