Regularitätslemma: $\forall \varepsilon>0, t>0 \ \exists n_0, T$ so dass:

jeder Graph mit $n \geq n_0$ Knoten hat eine ε-reguläre Partition $V_0 \cup V_1 \cup .. \cup V_k$ mit $t \leq k \leq T$, d.h.

(1) $|V_0| \leq \varepsilon n$

(2) $|V_1| = \ldots = |V_k| \geq \frac{n-\varepsilon n}{k}$

(3) alle bis auf $\leq \varepsilon k^2$ Paare (V_i, V_j) sind ε-regulär,

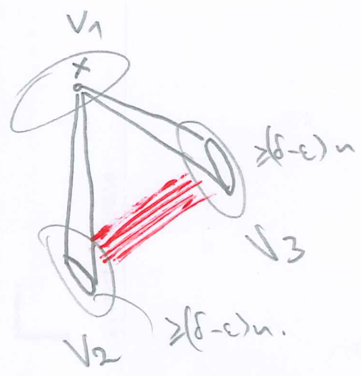
d.h. $\forall V_i' \subseteq V_i,\ V_j' \subseteq V_j$ mit $|V_i'|, |V_j'| \geq \varepsilon |V_i'|$

$$|d(V_i', V_j') - d(V_i, V_j)| \leq \varepsilon.$$

Satz 8' (Counting Lemma) sei $\varepsilon>0$, $\delta > 2\varepsilon$, $\varepsilon < 1/r$. Seien $V_1, \ldots, V_r$ disjunkte Knotenmengen, so dass $|V_1| = \ldots = |V_r| = n$, (V_i, V_j) ε-regulär und $d(V_i, V_j) \geq \delta$ $\forall\ 1 \leq i < j \leq r$. Dann enthält G mindestens

$$(1-r\varepsilon)^{r-2} (\delta-\varepsilon)^{\binom{r}{2}} n^r \quad K_r\text{'s}.$$

Beweis. Betrachte zunächst $r=3$. Sei



$$V_1' = \{x \in V_1 : |N_G(x) \cap V_2| \geq (\delta-\varepsilon)n,\ |N_G(x) \cap V_3| \geq (\delta-\varepsilon)n\}.$$

Sei $H_i = \{x \in V_1 : |N_G(x) \cap V_i| < (\delta-\varepsilon)n\}$, $i \in \{2,3\}$. Dann

$e(H_i, V_i) < (\delta-\varepsilon)n \cdot |H_i|$

$\overset{\varepsilon\text{-reg}}{\Longrightarrow} |H_i| \leq \varepsilon n,$

und damit $|V_1'| \geq (1-2\varepsilon)|V_1|$.

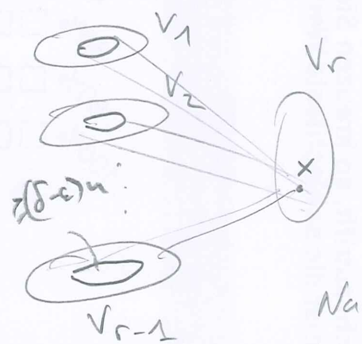
Da $\delta > 2\varepsilon$ ist $\delta - \varepsilon > \varepsilon$ und aus ε-reg von (V_2, V_3):

$$e(N_G(x) \cap V_2, N_G(x) \cap V_3) \geq \underbrace{(\delta-\varepsilon)}_{d_{23}-\varepsilon} \cdot \underbrace{(\delta-\varepsilon)^2 \cdot n^2}_{|N_G(x)\cap V_2| \cdot |N_G(x) \cap V_3|}$$

für alle $x \in V_1'$. Damit

$$\#\Delta \geq (1-2\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^3 \cdot n^3. \ \checkmark$$

Wir zeigen die Aussage mit Induktion. Sei $r \geq 4$.



Wie vorher: alle bis auf $\leq (r-1)\varepsilon n$ Knoten in V_r haben $\geq (\delta-\varepsilon)n$ Nachbarn in jedem $V_1, \ldots, V_{r-1}$.

Nach IA: es gibt

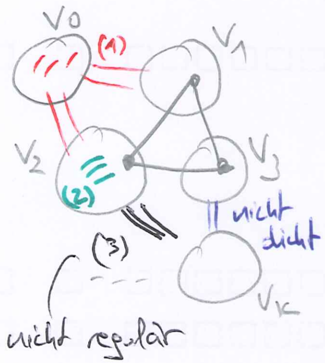
$$\geq (1-(r-1)\varepsilon)^{r-3} \cdot (\delta-\varepsilon)^{\binom{r-1}{2}} \cdot ((\delta-\varepsilon)n)^{r-1}$$

K_{r-1}'s mit Knoten in $N_G(x) \cap V_1, \ldots, N_G(x) \cap V_{r-1}$.

Da es $\geq (1-(r-1)\varepsilon) n$ Möglichkeiten für x gibt, folgt die Aussage. ∎

Satz 10. (Triangle-removal) $\forall \varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass jeder Graph mit n Knoten und $\leq \delta n^3$ K_3's durch löschen von $\leq \varepsilon n^2$ Kanten K_3-frei gemacht werden kann.

Bew. Sei $V_0, V_1, \dots, V_k$ eine $\varepsilon/4$-reguläre Partition von G mit $k \geq 4/\varepsilon$. Entferne alle Kanten xy von G mit



(1) $x \in V_0$

(2) $x, y \in V_i$ für ein $1 \leq i \leq k$

(3) $x \in V_i, y \in V_j$, (V_i, V_j) nicht $\varepsilon/4$-regulär

(4) $x \in V_i, y \in V_j$, $d(V_i, V_j) \leq \varepsilon/2$

Wieviele Kanten gelöscht?

(1) $\leq |V_0| \cdot n \leq \varepsilon/4\, n^2$ $\quad (|V_0| \leq \varepsilon n/4)$

(2) $\leq \sum_{i=1}^{k} |V_i|^2 \leq k \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \frac{n^2}{k} \leq \varepsilon/4\, n^2$, da $k \geq 4/\varepsilon$

(3) Da $\leq \varepsilon k^2/4$ nicht-reguläre Paare:

$\leq \varepsilon k^2/4 \cdot |V_i| \cdot |V_j| \leq \varepsilon/4\, n^2$.

(4) $\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \binom{k}{2} \left(\frac{n}{k}\right)^2 \leq \varepsilon/4\, n^2$.

Insgesamt: $\leq \varepsilon n^2$ Kanten.

Angenommen, es existiert ein K_3 (nachdem die Kanten entfernt wurden) xyz. Dann muss es $1 \leq i < j < l \leq k$ geben mit

$x \in X_i$, $y \in X_j$, $z \in X_l$,

und $(X_i, X_j), (X_j, X_l), (X_i, X_l)$ ε-regulär und $> \varepsilon/2$-dicht.

Mit counting-lemma: G enthält

$\geq C \cdot n^3$ K_3's für ein $C = C(\varepsilon) > 0$.

Dies ist ein ↯ für $\delta = C/2$. ∎

$\boxed{C = (1-3\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 \cdot T^{-3}}$

<u>Satz 11 (Roth)</u> Sei $\delta > 0$. Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass jede Teilmenge $A \subseteq [n]$ mit $n \geq n_0$ und $|A| \geq \delta n$ eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält.

(d.h. $\exists l, k \in \mathbb{N}$ mit $l, l+k, l+2k \in A$).

→ Field's Medal für Roth
→ Abel Prize für Szemerédi
→ Field medal for Gowers

<u>Lem 12.</u> Sei $\delta > 0$, dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für $n \geq n_0$ und für jede Teilmenge $B \subseteq [n]^2$ mit $\geq \delta n^2$ Elementen ein Tripel

$(x, y), (x+d, y), (x, y+d)$ mit $d > 0$

in B enthalten ist.

<u>Beweis.</u> $B + B := \{b + b' ; b \in B, b' \in B\} \subseteq [2n]^2$.

Damit gibt es $z \in [2n]^2$, welches in

$\geq \frac{(\delta n^2)^2}{(2n)^2} = \frac{\delta^2 n^2}{4}$

Arten als $b + b'$ geschrieben werden kann.

Sei $B' = B \cap (z - B)$, $\delta' = \delta^2/4$. Dann $|B'| \geq \delta' n^2$, und falls B' ein Tripel $(x,y)(x+d,y), (x,y+d)$ mit $d<0$ enthält, so enthält $z-B$ auch so ein Tripel, und damit enthält B ein Tripel mit $d>0$.

$\Rightarrow$ es genügt, ein Tripel $(x,y), (x+d,y), (x,y+d)$ mit $d \neq 0$ zu finden.

Betrachte 3-partiten Graph mit Knoten in

$X = [n]$, $Y = [n]$, $Z = [2n]$

(alle Mengen disjunkt), und Kanten, so dass

$x \in X, y \in Y$: $xy \in E$ falls $(x,y) \in B$

$x \in X, z \in Z$: $xz \in E$ falls $(x, z-x) \in B$

$y \in Y, z \in Z$: $yz \in E$ falls $(z-y, y) \in B$.

"z ist Summe, die mit x gebildet werden kann"

Sei xyz K_3 in G. Dann

$(x,y), (x, y + \underbrace{(z-x-y)}_{z-x}), (x + \underbrace{(z-x-y)}_{z-y}, y) \in B$.

Falls $z \neq x+y$ dann ✓. Ansonsten gibt es $\leq n^2$ K_3's in G, und mit removal lemma: der Graph kann K_3-frei gemacht werden, indem $\leq \frac{\delta}{2} n^2$ Kanten gelöscht werden.

Andererseits, jedes $(x,y) \in B$ definiert einen K_3 in G, mit $z = x+y$. Also gibt es $\geq \delta n^2$ K_3's, die kantendisjunkt sind; diese können nicht gelöscht werden durch $\delta/2\, n^2$ Kanten ↯ ∎

Bew. (Satz 11).

Sei $B \subseteq [2n]^2$, $B = \{(x,y) : x-y \in A\}$. Dann:

$|B| \geq \delta n^2 = \frac{\delta}{4}(2n)^2$.

Mit Lem 11: es gibt

$(x,y), (x+d,y), (x,y+d)$, $d>0$ in B.

Daraus:

$x-y$, $x-y+d$, $x-y-d \in A$. ✓ ∎