Lemma 6

Sei $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ wobei $|X_1| \geq \varepsilon |X|$, $|Y_1| \geq \varepsilon |Y|$ und $|d(X_1, Y_1) - d(X, Y)| \geq \varepsilon$. Dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j) \geq d(X,Y)^2 + \varepsilon^4$$

Beweis

Wir hatten gesehen, dass

$$|X||Y| \, d(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} |X_i||Y_j| \, d(X_i, Y_j). \qquad (*)$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} \left(d(X_i, Y_j) - d(X,Y)\right)^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2 - 2d(X,Y)\left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)\right) + d(X,Y)^2$$

$$\overset{(*)}{=} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2\right) - d(X,Y)^2$$

Da der erste Term mindestens ε^4 für $i=j=1$, und nicht negativ sonst, ist folgt die Aussage. $\boxtimes$

~~Wir~~ Eine gegebene Partition $\Pi = \{V_i\}_{i=0}^{k}$ gebrachten wir als eine Partition mit $|V_0| + k$ Teilen, wobei jeder Knoten in V_0 sein ~~en~~ eigene ~~r~~ Teil ist.
Setze $|\Pi| = k$.

Lemma 7 Ist $\Pi = \{V_i\}_{i=0}^{k}$ keine ε-reguläre Partition, dann existiert eine Verfeinerung Π' von Π mit $d_2(\Pi') \geq d_2(\Pi) + \varepsilon^5$ und $|\Pi'| \leq |\Pi| 2^{|\Pi|}$.

Beweis Da $\Pi = \{V_i\}_{i=0}^{k}$ nicht ε-regulär ist, gibt es mindestens εk^2 Paare (V_i, V_j) für die Teilmengen $V_i^{(1)} \subseteq V_i$ und $V_j^{(1)} \subseteq V_j$ mit $|V_i^{(1)}| \geq |V_i|$ $|V_j^{(1)}| \geq |V_j|$ und $|d(V_i^{(1)}, V_j^{(1)}) - d(V_i, V_j)| \geq \varepsilon$ existieren.

Setze $V_i^{(2)} = V_i \setminus V_i^{(1)}$ und $V_j^{(2)} = V_j \setminus V_j^{(1)}$. Dann gilt mit Lemma

$$\sum_{k,l=1}^{2} \frac{|V_i^{(k)}||V_j^{(l)}|}{n^2} d(V_i^{(k)}, V_j^{(l)}) \geq \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 + \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \varepsilon^4.$$

Für jedes nicht ε-reguläre Paar (V_i, V_j) partitioniere die Mengen V_i und V_j wie oben und definiere Π' als die daraus erzeugte Verfeinerung von Π.
Sei für alle i: $V_i = V_{i,1} \cup V_{i,2} \cup \ldots \cup V_{i,k_i}$ wobei die rechte Seite aus Mengen aus Π' besteht. Es gilt $k_i \leq 2^k$ für alle i und damit $|\Pi'| \leq |\Pi| 2^{|\Pi|}$.
Für alle nicht ε-regulären Paare (V_i, V_j) haben wir also mit Lemma 5(2)

$$\sum_{a=1}^{k_i} \sum_{b=1}^{k_j} \frac{|V_{i,a}||V_{j,b}|}{n^2} d(V_{i,a}, V_{j,b})^2 \geq \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 + \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \varepsilon^4.$$

Da es mindestens εk^2 nicht reguläre Paar gibt folgt also

$$d_2(\Pi') \geq d_2(\Pi) + \varepsilon k^2 \cdot \frac{((1-\varepsilon)n/k)^2}{n^2} \varepsilon^4 \geq d_2(\Pi) + \frac{1}{2}\varepsilon^5.$$

$\boxtimes$

Nun können wir alle Fakten zum Beweis von Satz 4 zusammentragen.

<u>Beweis</u> (Satz 4)

Beginne mit einer beliebigen equitablen Partition $\Pi_0 = \{V_i\}_{i=0}^{t}$ wobei $|V_0| \leq t-1$. Ist Π_0 keine ε-reguläre Partition, dann existiert nach Lemma 7 eine Verfeinerung Π_1' von Π_0 mit

$d_2(\Pi_1') \geq d_2(\Pi_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^5$ und $A := |\Pi_1'| \leq |\Pi_0| 2^{|\Pi_0|}$.

Π_1' ist apriori nicht equitabel, wir können es aber zu einer equitablen Partition Π_1 verändern, indem wir jeden Teil von Π_1' in Teile der Größe $\frac{1}{2}\varepsilon^6 \frac{n}{A}$ aufteilen. Wir erhalten maximal $|A|$ Teile die kleinere Größe haben; diese verschieben wir in die exceptionelle Menge. Diese Menge ist also maximal um $\frac{1}{2}\varepsilon^6 n$ gewachsen. Mit Lemma 5 (2) erhalten wir

$$d_2(\Pi_1) \geq d_2(\Pi_1') \geq d_2(\Pi_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^5.$$

Wiederhole nun diesen Schritt solange die resultierende Partition nicht ε-regulär ist.

Für die k-te Partition Π_k gilt $d_2(\Pi_k) \geq \frac{1}{2}\varepsilon^5(k-1)$ und da nach Lemma 5 (1) $d_2(\Pi_k) \leq \frac{1}{2}$ gilt folgt, dass der Prozess in maximal ε^{-5} Schritten enden muss. Nach ε^{-5} Schritten hat die exceptionelle Menge höchstens $\frac{1}{2}\varepsilon^6 n \cdot \varepsilon^{-5} < \varepsilon n$ Elemente. Wir erhalten also eine ε-reguläre Partition. ☐

<u>Bemerkung</u>

In jedem Schritt steigt die Anzahl der Teile der Partition exponentiell. Die Schranke an die Anzahl der Teile der Partition verhält sich also wie „$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$" ein „exponentieller Turm" der Höhe ε^{-5}.

Gowers hat gezeigt, dass diese Schranke scharf ist, d.h. es gibt Graphen die „exponentieller Turm" viele Teile in jeder ε-regulären Partition benötigen.

Als Anwendung von Szemeredis Regularity Lemma werden wir einen alternativen Beweis vom Satz 5.3 (Erdős-Stone-Simonovits) geben.

Für eine Partition $\Pi = \{V_i\}_{i=0}^{k}$ ist der <u>(ε,δ)-reduzierte Graph</u> ~~[illegible]~~ von Π, $R(\Pi)$, gegeben als der Graph auf der Knotenmenge $[k]$, der jede Kante $\{i,j\}$ genau dann enthält, wenn das Paar (V_i, V_j) in Π ε-regulär ist mit Dichte mindestens δ.

<u>Satz 8</u> (Counting Lemma)

Für jeden Graphen H und jedes $\delta > 0$ existiert $c > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$ sodass folgendes für alle $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt. Sei G ein Graph und sei Π eine Knotenpartition von G. Enthält $R(\Pi)$ eine Kopie von H, dann enthält auch G eine Kopie von H.
Ist weiter die Kopie von H auf den Knoten $1,\dots,r$ von $R(\Pi)$, dann sind mindestens $c \prod_{i=1}^{r} |V_i|$ Kopien von H in G enthalten.

Für den Beweis benötigen wir

Lemma 9

Sei (X,Y) ein ε-reguläres Paar mit Dichte d. Für alle $Y' \subseteq Y$ mit $|Y'| \geq \varepsilon |Y|$ gibt es weniger als $\varepsilon |X|$ Knoten in X die weniger als $(d-\varepsilon)|Y'|$ Nachbarn in Y' haben.

Beweis

Sei X' die Menge der Knoten in X mit weniger als $(d-\varepsilon)|Y|$ Nachbarn in Y'. Dann

$$e(X',Y') < |X'|(d-\varepsilon)|Y'|$$

und damit $d(X',Y') < d-\varepsilon$. Da das Paar (X,Y) ε-regulär ist, kann das nur für $|X'| < \varepsilon |X|$ eintreten. $\square$

Beweis (Satz 8)

Wir beschränken uns auf den Fall dass $H = K_r$ für ein $r \geq 2$. O.B.d.A können wir annehmen, dass $V_1, V_2, \dots, V_r$ disjunkte Mengen sind, sodass für alle $i \neq j$ das Paar (V_i, V_j) ε-regulär mit Dichte mindes δ ist.

Seien $v_1, v_2, \dots, v_r$ die Knoten von K_r. Wir werden die Knoten v_i, $1 \leq i \leq r$, nacheinander in V_i einbetten. Nachdem wir den t-ten Knoten eingebettet haben, wir folgende Ungleichung gelten, für alle $j > t$:

$$\left| V_j \cap \bigcap_{i=1}^{t} N(v_i) \right| \geq (\delta - \varepsilon)^t |V_j|$$

Sei dies also unsere Induktionsvoraussetzung. IA für $t=0$ ist klar.

Nehmen wir also an, dass wir die Knoten $v_1, v_2, \dots, v_t$ für ein $t \geq 0$ eingebettet haben.

Setze $W_j = V_j \cap \bigcap_{i=1}^{t} N(v_i)$, $t < j \leq r$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir, dass $|W_j| \geq (d-\varepsilon)^t |V_j|$ für alle $j > t$.

Wähle ε_0 so, dass $\varepsilon_0 < (d-\varepsilon_0)^r/(2r)$, dann gilt $|W_j| \geq \varepsilon |V_j|$ für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$ und damit gibt es höchstens $\varepsilon |V_{t+1}|$ Knoten in V_{t+1} die weniger als $(d-\varepsilon)|W_j|$ Nachbarn in W_j haben.

Sei $W'_{t+1} \subseteq W_{t+1}$ die Menge der Knoten in W_{t+1} die mehr als $(d-\varepsilon)|W_j|$ Nachbarn in W_j für alle $j > t+1$ haben. Dann ist

$$|W'_{t+1}| \geq |W_{t+1}| - r \cdot \varepsilon |V_{t+1}| \geq \frac{1}{2}(d-\varepsilon)^t |V_{t+1}|$$

Wir können also v_{t+1} in einen beliebigen Knoten von W'_{t+1} einbetten.

Die Gesamtzahl der Kopien von K_r ist also mindestens

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{2}(d-\varepsilon)^i |V_i| = \frac{1}{2^r}(d-\varepsilon)^{\binom{r}{2}} \prod_{i=1}^{r} |V_i|.$$