Beweis von Satz 4.12

$\chi(G)$ = chromatische Zahl von G

$g(G)$ = girth, Länge des kürzesten Kreises in G

Satz 4.12 Sei $k, \ell \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen Graphen G mit $\chi(G) \geq k$ und $g(G) \geq \ell$.

Notation: Für eine Färbung $c: V(G) \to [k]$ ist $G[c^{-1}(i)]$ ein Graph ohne Kanten. Eine Menge $S \subseteq V(G)$ mit $E(G) \cap \binom{S}{2} = \emptyset$ heißt unabhängig.

Sei $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ ist unabhängig in } G\}$

Es gilt offensichtlich $\chi(G) \geq \frac{v(G)}{\alpha(G)}$

Beweis (Satz 4.12)

Betrachte $G_{n,p}$ mit $p = n^{\ell/(\ell+1)}$. (! Magic!)

Sei X die Anzahl der Kreise in $G_{n,p}$ mit $\leq \ell$ Knoten. Dann

$$E[X] \leq \sum_{i=3}^{\ell} \binom{n}{i} p^i \leq \sum_{i=3}^{\ell} n^i n^{-i\,\ell/(\ell+1)} \leq \ell\, n^{\ell/(\ell+1)}.$$

Das divergiert. Aber: (mit Markov)

$$P(X > \tfrac{n}{2}) \leq \frac{E[X]}{n/2} \leq \frac{2\ell\, n^{\ell/(\ell+1)}}{n} = o(1).$$

D.h. $X \leq \frac{n}{2}$ mhw, und für n groß genug:

$$P(X \leq \tfrac{n}{2}) \geq \frac{3}{4} \qquad (*)$$

Weiter sei $\gamma = 1 + \lceil \frac{3}{p} \log n \rceil$. Dann

$$P(\alpha(G_{n,p}) \geq \gamma) \leq \binom{n}{\gamma} (1-p)^{\binom{\gamma}{2}}$$

wähle Teilmenge mit γ Knoten

Wahrscheinlichkeit dass Teilmenge unabhängig

$$\leq n^\gamma \exp\left(-p\,\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\right) = \exp\left(\gamma\left(\log n - p\,\frac{\gamma-1}{2}\right)\right)$$

$$\leq \exp\left(\gamma\left(\log n - \frac{p}{2}\,\frac{3}{p}\log n\right)\right) = o(1)$$

D.h. $\alpha(G_{n,p}) < \gamma$ mhw, und für n groß genug

$$P(\alpha(G_{n,p}) < \gamma) \geq \frac{3}{4} \qquad (**)$$

Aus $(*)$, $(**)$ erhalten wir: es gibt G mit

a) Anzahl der Kreise mit $\leq \ell$ Knoten ist $\leq \frac{n}{2}$

b) $\alpha(G) < \gamma$

Wir konstruieren $G' \subseteq G$ indem wir aus jedem Kreis mit $\leq \ell$ Knoten ein Knoten entfernt wird.

Dann $v(G') \geq \frac{n}{2}$ und $g(G') \geq \ell$.

Außerdem:

$$\alpha(G') \leq \alpha(G) \leq 2 + \frac{3}{p}\log n$$

$$\Rightarrow \chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')} \geq \frac{n}{2}\,\frac{1}{2 + 3n^{\ell/(\ell+1)}\log n} \longrightarrow \infty$$

$\square$

Satz 1 (Chernoff Bounds) Sei $X \sim Bin(n,p)$, $\mu = np$, $t > 0$. Dann

1) $P(X > \mu + t) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{2(\mu+t)}\right)$

2) $P(X < \mu - t) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{2\mu}\right)$

Beweis (Skizze) Nur upper tail. Sei $\mu > 0$. Dann

$$P(X > \mu + t) = P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda(\mu+t)}) \leq \mathbb{E}[e^{\lambda X}] e^{-\lambda(\mu+t)} \quad \text{(Markov)}$$

$X_i \sim Be(p)$, unabh.

Es gilt:

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] = (1-p+pe^{\lambda})^n$$

$$\Rightarrow P(X > \mu + t) \leq (1+p+e^{\lambda}p)^n e^{-\lambda(\mu+t)}$$

Optimiere für λ!

Für $\{X < \mu - t\}$ ersetze X mit $-X$.

Korollar 2 Sei $X \sim Bin(n,p)$, $\mu = np$, $1 > \delta > 0$. Dann

$$P(|X - \mu| \geq \delta\mu) \leq 2e^{-\mu\delta^2/4}$$

5. Ein Abel-Preis gekröntes Theorem

Motivation: Zufallsgraphen verhalten sich besonders „nett", insbesondere ~~sind sie~~ ~~sehr~~ ist die Verteilung der Kanten sehr „regulär".

Lemma 1 Sei $\varepsilon, p > 0$. Mhw gilt: $\forall A, B \subseteq [n]$, $A \cap B = \emptyset$, $|A|, |B| \geq \varepsilon n$. Dann

$$|e_{G_{n,p}}(A,B) - |A||B| \cdot p| \leq \varepsilon n^2.$$

Dafür brauchen wir:

Beweis (Lemma 1)

$$P(\exists A, B : |e(A,B) - |A||B|p| \geq \varepsilon n^2)$$

$$\leq \sum_{a,b > 0}^{n} \binom{n}{a}\binom{n}{b} P(|Bin(ab,p) - abp| \geq \varepsilon n^2)$$

$$\overset{\text{Korollar 2}}{\leq} 4^n n^2 \exp\left(-abp\left(\frac{\varepsilon n^2}{abp}\right)^2/4\right)$$

$$= 4^n n^2 \exp(-\varepsilon^2 n^4/(4abp)) = o(1) \quad \square$$

Sei G ein Graph, $A, B \subseteq V(G)$, $A \cap B = \emptyset$. Die Dichte zwischen A und B ist gegeben durch

$$d_G(A,B) = \frac{e(A,B)}{|A||B|}.$$

Ist $G = G_{n,p}$ und $\varepsilon > 0$, so gilt mhw für alle $A, B \subseteq V(G)$, $|A|, |B| \geq \varepsilon n$, dass $d_G(A,B) = p \pm \varepsilon$

Wir sagen, dass ein Paar $A, B \subseteq V(G)$ <u>ε-regulär</u> ist, falls

$$|d_G(A', B') - d_G(A,B)| < \varepsilon$$

für alle $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ mit $|A'| \geq \varepsilon |A|$, $|B'| \geq \varepsilon |B|$.

Diese Definition macht nur für „dichte" Graphen Sinn, d.h. ist $d_G(A,B) \ll \varepsilon$ so ist die Definition immer erfüllt.

Sei $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k$ eine (Knoten) Partition. V heißt ~~equitabel~~ <u>fair</u> (equitable), wenn

$|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k|$. V_0 heißt <u>exceptionelle Menge</u>.

Wir nennen weiterhin die Partition $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k$ <u>ε-regulär</u>, falls

1) sie fair (equitable) ist,
2) $|V_0| < \varepsilon n$ und
3) alle bis auf höchstens εk^2 Paare (V_i, V_j) sind ε-regulär.

Eine Partition mit $k = v(G)$ ist trivialerweise ε-regulär. Die Frage ist, ob es auch mit viel weniger Teilen funktioniert?

Antwort: Ja!

<u>Satz 4</u> (Szemerédi's Regularity Lemma)

Für alle $\varepsilon, t > 0$ gibt es N und T sodass für alle $n \geq N$, ~~alle~~ alle Graphen auf n Knoten eine ε-reguläre Partition $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k$ mit $t \leq k \leq T$ zulassen.

Hat G weniger als $\varepsilon^4 n^2$ Knoten, so ist die Aussage trivialerweise wahr. Satz 4 wird daher auch als „dense regularity lemma" bezeichnet. (Es gibt auch ein „sparse regularity lemma".)

Für den Beweis werden wir zeigen, dass solange eine Partition nicht ε-regulär ist, es eine Verfeinerung dieser Partition gibt sodass die mittlere quadratische Dichte wächst.

Die <u>mittlere quadratische Dichte</u> einer Partition $\Pi = \{V_i\}_{i=1}^{k}$ ist gegeben als

$$d_2(\Pi) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 .$$

Eine Partition Π' verfeinert eine andere Partition Π, wenn jeder Teil von Π als Vereinigung von Teilen aus Π' gegeben ist.

<u>Lemma 5</u> Sei G ein Graph

1) Für alle Partitionen Π gilt $0 \le d_2(\Pi) \le \frac{1}{2}$

2) Verfeinert Π' die Partition Π, so ist $d_2(\Pi') \ge d_2(\Pi)$.

<u>Beweis</u>

1) Aus $\sum_{1 \le i < j \le k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \le \frac{1}{2}$ und $0 \le d(V_i, V_j) \le 1$ folgt, dass die mittlere quadratische Dichte immer zwischen 0 und $1/2$ liegt.

2) Sei $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$, dann

$$e(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} e(X_i, Y_j)$$

und damit

$$|X||Y|\, d(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} |X_i||Y_j|\, d(X_i, Y_j).$$

Mit Cauchy-Schwarz gilt also

$$d(X,Y)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j) \right)^2 \le \sum \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2$$

Ist insbesondere $Y_2 = \emptyset$, so erhält man Π' aus Π indem man einen Teil in zwei Teile teilt; und $d_2(\Pi') \ge d_2(\Pi)$. Iterieren dieses Schrittes erlaubt es beliebige Verfeinerungen Π' von Π mit $d_2(\Pi') \ge d_2(\Pi)$ zu erzeugen.

$\square$