4. Poisson Paradigma

Sei $X = (X_1, \dots, X_N)$ ZV, $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{N}$ monoton steigend in jeder Koordinate, d.h.

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y), \ g(x) \leq g(y).$$

Lem 4.1 $\mathbb{E}[f(\vec{X}) \cdot g(\vec{X})] \geq \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{E}[g(X)]$.

Bew. Beachte dass

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Sei Y verteilt wie X und unabhängig von X. Dann

$$0 \leq \mathbb{E}[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))]$$

$$= \mathbb{E}[f(X) \cdot g(X) - f(X) g(Y) - f(Y) g(X) - f(Y) g(Y)]$$

Aber $\mathbb{E}[f(X) g(X)] = \mathbb{E}[f(Y) g(Y)]$ usw, deswegen

$$0 \leq 2 \cdot (\mathbb{E}[fg] - \mathbb{E}[f] \cdot \mathbb{E}[g]).$$

Aus der Stochastik:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{mit } X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig und } P(X_i = 1) = p_n$$

Angenommen $\mathbb{E}[X] = n p_n \xrightarrow{n \to \infty} c > 0$. Dann

$$X \xrightarrow{d} Po(c), \quad \text{d.h. } \forall k \in \mathbb{N}_0 : P(X = k) \xrightarrow{n \to \infty} e^{-c} \cdot c^k / k!$$

$$(= P(Po(c) = k)).$$

Frage: was passiert, wenn die X_i abhängig sind?

$\rightsquigarrow$ Poisson Paradigma.

Bsp. Schwellenwert für K_4:

$$\lim_{n \to \infty} P(K_4 \subseteq G_{n,p}) = \begin{cases} 0, & p = o(n^{-2/3}) \\ 1, & p = \omega(n^{-2/3}) \end{cases}$$

Was passiert wenn $p = c \cdot n^{-2/3}$, $c > 0$?

Sei $X = \# K_4$'s im $G_{n,p}$. Dann

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{4} p^6 = (1 + o(1)) \frac{n^4}{4!} (c \cdot n^{-2/3})^6 \to c^6/24.$$

Vermutung: $P(X = 0) \to e^{-c^6/24}$, $X \xrightarrow{d} Po(c^6/24)$

Janson-Ungleichungen

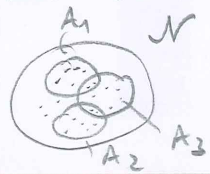
Endliche Grundmenge $\mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = N$. Konstruiere zufällige Teilmenge R:

$\to$ füge jedes $w \in \mathcal{N}$ unabhängig zu R hinzu, mit Wkeit $p_w \in [0,1]$.

Anwendung im $G_{n,p}$:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \mathcal{N} = \binom{[n]}{2} \\ \cdot\ p_w = p \ \forall w \in \mathcal{N} \end{array}\right\} \Rightarrow R = G_{n,p}$$

Sei I Indexmenge, $(A_i)_{i \in I}$ Familie von Teilmengen von $\mathcal{N}$.



Ziel: Berechne $P(\bigcap_{i \in I} \{A_i \not\subseteq R\})$.

(also $A_i \not\subseteq R \ \forall i \in I$).

Bsp. $R = G_{n,p}$ wie vorher. Sei

$I = \binom{[n]}{4}$; für $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in I$ sei $A_{\{v_1,v_2,v_3,v_4\}} = \{ v_i v_j : 1 \le i < j \le 4 \}$

$\{A_i \subseteq R\} \iff$ der i-te K_4 ist im $G_{n,p}$ enthalten

$\bigcap_{i \in I} \{A_i \not\subseteq R\} \iff G_{n,p}$ hat <u>keinen</u> K_4.

Wir schreiben: $X_i = \mathbb{1}[A_i \subseteq R]$, $i \in I$. Dann

$$\bigcap_{i \in I} \{A_i \not\subseteq R\} = \{X = 0\}, \quad X = \sum_{i \in I} X_i .$$

Sei $\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i \in I} \left(\prod_{w \in A_i} p_w \right)$.

Beob. Falls die X_i unabhängig ($\iff A_i \cap A_j = \emptyset \;\forall i,j,\, i \neq j$)

dann

$$P(X=0) = \prod_{i \in I} P(X=0) = \prod_{i \in I} (1 - \mathbb{E}[X_i]) \le e^{-\mu}.$$

Falls die p_w "klein genug", dann sogar $\sim e^{-\mu}$.

Satz 4.2. Sei $i \sim j$ falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $i \neq j$. Sei

$$\Delta = \sum_{i \sim j} P(X_i = X_j = 1) = \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

Dann: 1) $P(X=0) \le e^{-\mu + \Delta/2}$

2) $P(X=0) \le e^{-\mu^2/2\Delta}$, falls $\Delta \ge \mu$.

Außerdem: $P(X=0) \ge \prod_{i \in I} (1 - \mathbb{E}[X_i])$.

Vergleich mit Chebyshev / 2. Moment Methode:

$$P(X=0) \le \frac{Var[X]}{\mathbb{E}[X]^2}, \quad Var[X] = \sum_{i,j \in I} \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$$

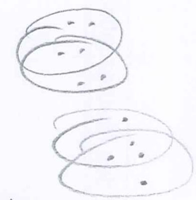
Wir schätzen immer ab:

$$Var[X] \le \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{i=j \in I} + \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[X_i X_j] = \mu + \Delta$$

$$\Rightarrow P(X=0) \le \frac{1}{\mu} + \frac{\Delta}{\mu^2} \quad \text{vs.} \quad P(X=0) \le e^{-\mu^2/2\Delta}$$

Janson ist in den meisten Fällen <u>exponentiell kleiner!</u>

Bsp. $X = \#K_4$'s im $G_{n,p}$, $p = cn^{-2/3}$.



$\rightarrow \mu = \mathbb{E}[X] = \binom{n}{4} p^6 \longrightarrow c^6/24$.

$\rightarrow \Delta \le n^6 p^{11} + n^5 p^9 = o(1)$

Mit Satz 4.2 1): $P(X=0) \le e^{-c^6/24 + o(1)}$

Außerdem: $P(X=0) \ge \prod_{i \in I} (1 - p^6)$

$(1 - x \ge e^{-x-x^2},\; x \le 1/2) \;\ge \exp\left(-\binom{n}{4} p^6 - \binom{n}{4} p^{12}\right)$

$= \exp\left(-c^6/24 + o(1)\right)$

Insgesamt: $P(X=0) \longrightarrow e^{-c^6/24}$.

Beweis (Satz 4.2) Sei oBdA $I = \{1, \dots, m\}$,

$B_i = \{A_i \subseteq R\} = \{X_i = 1\}$. Damit:

$P(X=0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \bar{B}_i\right) =$

$$= P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2 \mid \bar{B}_1) \cdot \ldots \cdot P\Big(\bar{B}_i \;\Big|\; \bigcap_{j=1}^{i-1} \bar{B}_j\Big) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot P\Big(\bar{B}_m \;\Big|\; \bigcap_{j=1}^{m-1} \bar{B}_j\Big)$$

Mit Lem 4.1: für $i \in I$, $J \subseteq I$

$$P\Big(B_i \;\Big|\; \bigcap_{j \in J} \bar{B}_j\Big) = \frac{P\big(B_i \cap \bigcap_{j\in J} \bar{B}_j\big)}{P\big(\bigcap_{j \in J} \bar{B}_j\big)} \le P(B_i)$$

(*)

Und analog:

$$P\Big(B_i \;\Big|\; B_k \cap \bigcap_{j \in J} \bar{B}_j\Big) \le P(B_i \mid B_k)$$

Für $1 \le i \le m$ sei

$$D_i = \bigcap_{\substack{j<i \\ j \sim i}} \bar{B}_j \quad , \quad N_i = \bigcap_{\substack{j<i \\ j \not\sim i}} \bar{B}_j$$

$$\Rightarrow P(X=0) = \prod_{i=1}^{m} P(\bar{B}_i \mid D_i \cap N_i)$$

Wir schätzen ab:

$$P(B_i \mid D_i \cap N_i) = \frac{P(B_i \cap D_i \cap N_i)}{P(D_i \cap N_i)}$$

$$= \frac{P(D_i \mid B_i \cap N_i) \cdot P(B_i \cap N_i)}{P(D_i \cap N_i)}$$

$$= \frac{P(D_i \mid B_i \cap N_i) \cdot \overbrace{P(B_i \mid N_i)}^{=P(B_i)}}{\underbrace{P(D_i \mid N_i)}_{\le 1}}$$

$$\ge P(B_i) \cdot P(D_i \mid B_i \cap N_i)$$

Mit Additivität von P:

$$P(D_i \mid B_i \cap N_i) = P\Big(\bigcap_{\substack{j<i \\ j\sim i}} \bar{B}_j \;\Big|\; B_i \cap N_i\Big)$$

$$= 1 - P\Big(\bigcup_{\substack{j<i \\ j\sim i}} B_j \;\Big|\; B_i \cap N_i\Big)$$

$$\ge 1 - \sum_{j<i,\, j\sim i} P(B_j \mid B_i \cap N_i)$$

$$\overset{(*)}{\ge} 1 - \sum_{j<i,\, j\sim i} P(B_j \mid B_i)$$

Insgesamt:

$$P(X=0) \le \prod_{i=1}^{m} \Big(1 - P(B_i) - \sum_{\substack{j<i \\ j\sim i}} P(B_i \cap B_j)\Big)$$

$$\le e^{-\mu + \Delta}.$$