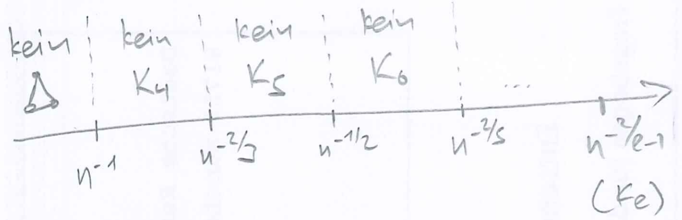


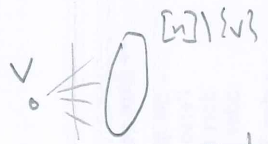
3. Zusammenhang

Beob. Falls G nicht zshg, dann hat G eine Komponente mit ≥ 1, $\leq \frac{v(G)}{2}$ Knoten. Sei

$$C_k := \#\text{ Komp. mit } k \text{ Knoten im } G_{n,p}.$$

Lem 3.1 Sei $p = \frac{\alpha \cdot \log n}{n}$, $\alpha > 0$. Dann $\mathbb{E}[C_1] = (1+o(1))\, n^{1-\alpha}$.

Bew. Sei Z_v, $v \in [n]$, Indikator für v isoliert. Dann



$$C_1 = \sum_{v \in [n]} Z_v \Rightarrow \mathbb{E}[C_1] = n \cdot (1-p)^{n-1},$$

und daraus $\mathbb{E}[C_1] = \exp\left(\log n + (n-1)\log(1-p)\right)$.

Mit $\log(1-x) = -x + \Theta(x^2)$, $|x| \leq 1/2$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[C_1] = \exp\left(\log n + (n-1)(-p + \Theta(p^2))\right)$$

Da $p = \frac{\alpha \cdot \log n}{n}$: $pn = \alpha \log n$, $p^2 n = \Theta\left(\frac{\log^2 n}{n}\right) = o(1)$.

Somit: $\mathbb{E}[C_1] = \exp\left((1-\alpha)\log n + o(1)\right)$. ∎

Mit erste Moment Methode:

$$\alpha > 1 \Rightarrow G_{n,p} \text{ hat keine isol. Knoten whw.}$$

Lem 3.2 Sei $p = \frac{\alpha \log n}{n}$, $0 < \alpha < 1$. Dann $C_1 > 0$ whw.

Beweis. Wir zeigen: $\frac{\mathbb{E}[C_1^2]}{\mathbb{E}[C_1]^2} = 1 + o(1)$. Daraus:

$\frac{\mathrm{Var}[C_1]}{\mathbb{E}[C_1]^2} = o(1)$ und mit ZMM folgt $C_1 > 0$ whw.

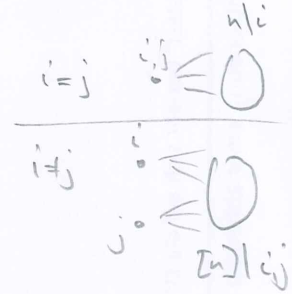
Mit $Z_v = \mathbb{1}[v \text{ isoliert}]$ folgt:

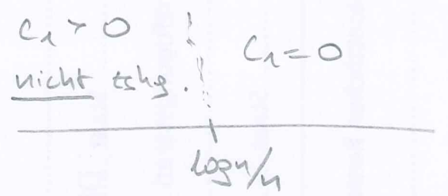
$$\frac{\mathbb{E}[C_1^2]}{\mathbb{E}[C_1]^2} = \frac{\sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathbb{E}[Z_i \cdot Z_j]}{\left(n(1-p)^{n-1}\right)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{n(1-p)^{n-1}}^{i=j} + \overbrace{n(n-1)\cdot(1-p)^{2n-3}}^{i\neq j}}{n(1-p)^{n-1})^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\mathbb{E}[C_1]}}_{\to 0,\ \text{Lem } 3.1} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1-p}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

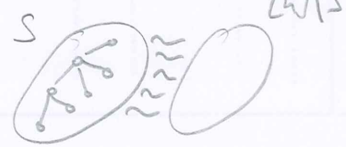
∎





Lem 3.3 Sei $\varepsilon > 0$, $p = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\frac{\log n}{n}$. Dann für n groß genug alle $2 \leq k \leq n/2$: $\mathbb{E}[C_k] \leq n^{-\varepsilon k/4}$.

Bew.



$$C_k = \sum_{S \in \binom{[n]}{k}} C_{k,S} \quad \text{mit}$$

$$C_{k,S} = \mathbb{1}[G_{n,p}[S] \text{ ist Komponente von } G_{n,p}].$$

Beob. Falls $C_{k,S} = 1$, dann:

① es gibt keine $S - [n] \setminus S$ Kanten im $G_{n,p}$

$\Rightarrow P(①) = (1-p)^{k(n-k)}$

② es gibt einen Baum T mit $V(T) = S$ und $T \subseteq G_{n,p}$

$\Rightarrow P(②) \le \underbrace{k^{k-2}}_{\#\text{Bäume}} \cdot \underbrace{p^{k-1}}_{e(T)=k-1}$.

Ferner, ①, ② sind unabhängige Ereignisse, also

$$\mathbb{E}[C_k] \le \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k)}$$

Mit $\binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!}$, $1-x \le e^{-x}$ folgt: $k! \ge (k/e)^k$

$$\mathbb{E}[C_k] \le \frac{1}{k^2 p} \cdot \left(e \cdot n \cdot p \cdot e^{-p(n-k)}\right)^k$$

Beachte: $e^{-p(n-k)} = n^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)} \cdot n^{+(\frac{1}{2}+\varepsilon)k \log n / n}$.

1. Fall. $k \le 10$. Dann $e^{-p(n-k)} = n^{-(1/2+\varepsilon)(1+o(1))}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[C_k] = \Theta(1) \cdot \frac{n}{\log n} \cdot \left(\log n \cdot n^{-(1/2+\varepsilon)}\right)^k$$

$$\le \Theta(1) \cdot (\log n)^9 \cdot n^{1-k(1/2+\varepsilon)}$$

$$\le \Theta(1) \cdot (\log n)^9 \cdot n^{-\varepsilon k} \le n^{-\varepsilon k/4}$$

2. Fall. $11 \le k \le n/2$. Dann $n-k \ge n/2$, also

$$e^{-p(n-k)} \le e^{-pn/2} \le n^{-1/4 - \varepsilon/2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[C_k] \le n \cdot \left(\Theta(1) \cdot \log n \cdot n^{-1/4-\varepsilon/2}\right)^k = o(n^{-\varepsilon k}).$$

Aus dem Lemma:

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=2}^{n/2} C_k\Big] \le \sum_{k \ge 2} n^{-\varepsilon/4 \cdot k} = o(1)$$

Insgesamt:

- $P(G_{n,p} \text{ zshg}) \le P(C_1 = 0) = o(1)$, falls $p = \frac{\alpha \log n}{n}$, $\alpha < 1$
- $P(G_{n,p} \text{ zshg}) = 1 - P(C_1 \ge 1 \text{ oder } C_2 \ge 1 \ldots C_{n/2} \ge 1)$

$$\ge 1 - \sum_{k=2}^{n/2} \mathbb{E}[C_k]$$

$$= 1 - o(1), \quad p = \frac{\alpha \log n}{n}, \ \alpha > 1.$$

Satz 3.4. Sei $\varepsilon > 0$. Dann:

$$\lim_{n\to\infty} P(G_{n,p} \text{ zshg}) = \begin{cases} 1, & p \ge \frac{(1+\varepsilon)\log n}{n} \\ 0, & p \le \frac{(1-\varepsilon)\log n}{n} \end{cases}$$

"Starker Schwellenwert". $p = \frac{\log n}{n}$??

Wir wissen: für $|\varepsilon| < 1/2$ hat $G_{n,p}$ mit $p = \frac{(1+\varepsilon)\log n}{n}$ keine Komp. mit ≥ 2, $\le n/2$ Knoten whp, also

$$P(G_{n,p} \text{ zshg}) = P(C_1 = 0) + o(1).$$

Satz 3.5 Sei $p = \frac{\log n}{n} + \frac{c}{n}$, $c \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\lim_{n\to\infty} P(C_1 = 0) = e^{-e^{-c}}$$

Bew. Sei E_i das Ereignis, dass i isoliert. Dann:

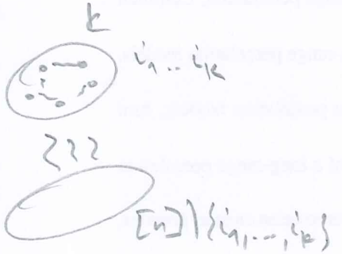
Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le n} P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{E}_{i_j} \Big)$$

Dann mit Inklusion | Exklusion (Bonferroni-Ungl.)

$$\sum_{k=1}^{2\ell} (-1)^{k+1} S_k \le P(C_1 > 0) \le \sum_{k=1}^{2\ell+1} (-1)^{k+1} S_k \,, \quad \ell \in \mathbb{N}_0 .$$

Sei $\ell = \lceil \log n \rceil$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$, $k = 2\ell + 1$. Dann



$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{E}_{i_j} \Big) = (1-p)^{k(n-1) - \binom{k}{2}}$$

$$= \exp\Big(\Big(k(n-1) - \binom{k}{2}\Big) \big(-p + \Theta(p^2)\big) \Big)$$

$$= \exp\Big(-pk(n-1) + p\binom{k}{2} + \Theta(p^2 kn) \Big).$$

Mit Annahme an p:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ pk(n-1) = k \cdot \log n + kc + o(1) \\ \bullet\ p\binom{k}{2} = O\Big(\frac{\log^3 n}{n}\Big) = o(1) \\ \bullet\ p^2 kn = O(\log^3 n / n) = o(1) \end{array}\right\} \quad P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{E}_{i_j} \Big) = \exp(-k \cdot \log n - kc + o(1)).$$

Außerdem:

$$\frac{n^k}{k!}\big(1 - k^2/n\big) \le \binom{n}{k} \le n^k/k! \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = (1+o(1)) \frac{n^k}{k!} .$$

Daraus:

$$\boxed{S_k = (1+o(1))\, e^{-kc}/k!} .$$

Beachte, dass

$$\sum_{k \ge 1} (-1)^{k+1} \frac{e^{-kc}}{k!} = 1 - e^{-e^{-c}}$$

Damit: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2\ell+1} (-1)^{k+1} S_k \xrightarrow{n \to \infty} 1 - e^{-e^{-c}}$.